

Exercice 1

Écrire en Python une fonction `somme_rec` qui prend en argument une liste de nombres et qui renvoie la somme de ses éléments. On impose dans cette question que la fonction soit **récursive** et on convient que `somme_rec([]) = 0`.

Exercice 2

1. Étudier la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-n^3}$.
2. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+1)(2^n - n!)}{2^n \times (n!)}$ et calculer sa somme.

Exercice 3

Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = \ln \ln(n+1) - \ln \ln n$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.
2. À l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ sur un intervalle à identifier, démontrer que : $\forall n \geq 2, u_n \leq \frac{1}{n \ln n}$.
3. En déduire que la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.

Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \text{ et } v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right).$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est bien définie puis donner un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Indication : on utilisera le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$
3. En déduire par télescopage que la suite $(\ln u_n)_{n \geq 1}$ converge.

Exercice 5

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Préciser si chacune des fonctions ci-dessous est dérivable sur $\mathbb{R}$ ou admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et calculer la dérivée ou les dérivées partielles associées.

1. $g_1 : (x, y) \mapsto f(y, x)$
2. $g_2 : x \mapsto f(x, x)$
3. $g_3 : (x, y) \mapsto f(y, f(x, x))$
4. $g_4 : x \mapsto f(x, f(x, x))$.

Indication : on pourra utiliser le résultat sur la fonction g_2 pour traiter les fonctions g_3 et g_4 .

* *
*