Exercice 1

```python
def somme_rec(L):
    if L == []:
        return 0
    else:
        return L[0] + somme_rec(L[1:])
```

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $n \leqslant n^3$, $0 \leqslant e^{-n^3} \leqslant e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Puisque $\frac{1}{e} \in]-1,1[$, la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n^3}$ converge.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{(n+1)\left(2^n - n!\right)}{2^n \times (n!)} &= \sum_{n=0}^{N}(n+1)\left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{2^n}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&\underset{N\to+\infty}{\to} e + e - \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2e - 4,
\end{aligned}$$

en reconnaissant des sommes partielles de séries convergentes : une série géométrique et une série géométrique dérivées de même raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ et deux séries exponentielles.

On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+1)\left(2^n - n!\right)}{2^n \times (n!)}$ converge et :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)\left(2^n - n!\right)}{2^n \times (n!)} = 2e - 4.}$$

Exercice 3

1. Soit $N \geqslant 2$. On reconnait ci-dessous une somme télescopique :

$$\sum_{n=2}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N} \ln\ln(n+1) - \ln\ln n = \ln\ln(N+1) - \ln\ln 3 \underset{N\to+\infty}{\to} +\infty.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ et on fixe un entier $n \geqslant 2$. La fonction f est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ $\left(\text{et } f' : x \mapsto \frac{1}{x\ln x}\right)$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que :

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c_n),$$

c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{1}{c_n \ln c_n}$$

Puisque $c_n \geqslant n$, $c_n \ln c_n \geqslant n \ln n$. On conclut alors que :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n \leqslant \frac{1}{n\ln n}.$$

3. Puisque, pour tout entier $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n\ln n}$ (d'après 2 et puisque la fonction f est croissante sur $[n, n+1]$) et puisque la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

Exercice 4

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$, garantissant que la suite (v_n) est bien définie.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n &= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}} e^{-n-1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right) \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.
\end{aligned}$$

Puisque $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o_{u\to 0}(u^3)$, on trouve que :

$$\begin{aligned} v_n &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\ &= \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit donc que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{12n^2} \geqslant 0$. Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{12n^2}$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge d'après le critère d'équivalence de séries à termes positifs.

3. Pour tout $n \geqslant 2$, on obtient par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_n) - \ln(u_1).$$

Ainsi :

$$\ln(u_k) = \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que la suite $(\ln u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Exercice 5

1. La fonction g_1 admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ par composition et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$

2. La fonction g_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_2'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x).$$

3. Remarquons que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g_3(x,y) = f(y, g_2(x)).$$

La fonction g_3 admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ par composition et :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= g_2'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(y, g_2(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(y, f(x,x)) \\ \text{et } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(y, g_2(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, f(x,x)). \end{aligned}$$

4. Remarquons que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_4(x,y) = f(x, g_2(x)).$$

La fonction g_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ g_4'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, g_2(x)) + g_2'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, g_2(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,x)). \end{aligned}$$

* *
*