

Semaines 5 et 6

du lundi 20 octobre au vendredi 7 novembre 2025

Chapitre : Nombres complexes (révisions de sup)**Chapitre** : Polynômes

• Mots-clé du cours :

- Notation X pour désigner la fonction $x \mapsto x$.
- Généralités : opérations sur les polynômes (combinaison linéaire, produit, composée), unicité de l'écriture d'un polynôme, coefficient dominant, degré (définition, liens avec les opérations sur les polynômes), notations $K[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ (tout le chapitre se limite à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
- Racine et factorisation : définition d'une racine, caractérisation, généralisation à plusieurs racines distinctes, ordre de multiplicité d'une racine (la caractérisation par les dérivées successives est hors-programme)
- Polynômes et nombres complexes : conjugué d'une racine d'un polynôme à coefficients réels, théorème de d'Alembert-Gauss, factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ (la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est hors-programme).

Chapitre : Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

• Mots-clé du cours :

- espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: définition, premières propriétés de calcul,
- sous-espaces vectoriels : définition, caractérisation, intersection de sous-espaces vectoriels, sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs,
- famille génératrice d'un espace vectoriel, famille finie, propriétés usuelles,
- base : définition, caractérisation d'une base par l'existence d'une unique décomposition, base canonique,
- dimension : définition, notion de droite, de plan, d'hyperplan, théorème de la base incomplète, caractérisation d'une base par le nombre de vecteurs d'une famille libre, par une famille génératrice, dimension d'un sous-espace vectoriel,
- rang : définition, propriétés d'invariance
- espace vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (nous verrons plus tard la structure d'espaces vectoriels de l'ensemble des applications linéaires de E vers F).

Résultats à connaître :

- ☐ degré d'une somme, du produit, de la composée de deux polynômes, degré du produit par un scalaire,
- ☐ caractérisation d'une racine
- ☐ caractérisation d'un nombre fini de racines deux-à-deux distinctes
- ☐ caractérisation d'une racine multiple
- ☐ majoration du nombre de racines d'un polynôme par son degré
- ☐ théorème de d'Alembert-Gauss
- ☐ factorisation dans $\mathbb{C}[X]$
- ☐ nombre de racines complexes comptées avec multiplicité
- ☐ caractérisation d'un sous-espace vectoriel,
- ☐ intersection de sous-espaces vectoriels,
- ☐ si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les vecteurs e_k sont des vecteurs d'un espace vectoriel E , $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E (la démonstration est exigible),

- ☐ toute famille finie de polynômes non nuls de degrés étagés est libre (*la démonstration est exigible*),
- ☐ caractérisation d'une base par l'existence d'une unique décomposition,
- ☐ toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension fini ont même cardinal.
- ☐ théorème de la base incomplète (+ version famille génératrice)
- ☐ caractérisation d'une base par le nombre de vecteurs d'une famille libre,
- ☐ caractérisation d'une famille libre ou génératrice par son rang, (*la démonstration est exigible*)
- ☐ invariance du rang d'une famille de vecteurs par les opérations élémentaires.