Variables aléatoires réelles finies

Exercice 1. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Dans chacun des cas suivants, déterminer la loi de X.

1. Une urne contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On choisit 5 jetons et on note X le nombre de voyelles obtenues.

2. On range aléatoirement 20 paires de chaussettes dans 3 tiroirs et on note X le nombre de paires de chaussettes rangées dans le premier tiroir.

3. Un cirque contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On choisit un animal au hasard et on note X son nombre de bosses.

4. On suppose qu'en cas de naissance, la probabilité d'obtenir un garçon est identique à celle d'obtenir d'une fille. On note X le nombre de filles dans une famille de 3 enfants.

5. On forme un jury de 6 personnes en les choisissant au hasard dans un groupe de 5 hommes et 4 femmes. On note X le nombre de femmes du jury.

Exercice 2. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Une urne contient $n-2$ boules blanches et 2 noires ($n \geq 2$). On les tire une à une sans remise et on désigne par X le rang d'apparition de la première boule noire.

Déterminer la loi de X.

Exercice 3. [Corrigé] ★★☆

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1+X}$ où X désigne une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

Exercice 4. Loi géométrique tronquée [Corrigé] ★★☆

Soit n un entier naturel non nul. Un archer dispose de n flèches dans son carquois.

A chaque tir, il atteint sa cible avec une probabilité $p \in]0;1[$. Il arrête de tirer dès qu'il a atteint sa cible ou qu'il n'a plus de flèche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de flèches utilisées.

1. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.

2. Calculer la probabilité que l'archer tire $k \in [\![1,n]\!]$ flèches sachant qu'il a atteint sa cible.

3. L'archer tire maintenant ses n flèches et gagne $n-k+1$ euros lorsqu'il atteint la cible au k-ème tir. On note Y le gain du joueur. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 5. [Corrigé] ★★★

Une roulette est composée de N secteurs numérotés de 1 à N. On lance la boule successivement et on note R_1, R_2, etc, les numéros obtenus. On s'arrête de jouer dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au précédent. On note X_N la variable aléatoire égale au nombre de lancers de la boule.

1. Déterminer l'univers-image de X_N.

2. Écrire en Python une fonction simulant la réalisation de la variable aléatoire X_N.

3. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_N > k)$.

4. En déduire l'espérance de X_N.

5. Calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{E}(X_N)$.

Inégalités de concentration

Exercice 6. [Corrigé] ★★☆

Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans un intervalle I. Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante sur I.

Montrer que : $\forall a \in I,\ \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(f(X))}{f(a)}$.

Exercice 7. [Corrigé] ★★☆

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Exercice 8. [Corrigé] ★★☆

Un institut de sondage a été missionné d'estimer la proportion p de végétariens en France. Il interroge pour cela n français. Puisque le choix des sondés s'effectue une population très grande, on admet que l'expérience peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de végétariens sondés et on souhaite quantifier à quelle point la fréquence $\frac{X_n}{n}$ approche la proportion p inconnue.

1. Déterminer la loi de X_n.

2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

3. En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une approximation de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Variables aléatoires réelles discrètes infinies

Exercice 9. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in]0,1[$. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de Y conditionnellement à $[X = n]$ est la loi binomiale de paramètres n et p. Déterminer la loi de Y.

Exercice 10. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{1}{1+X}$ admet une espérance qu'on calculera.

Exercice 11. ♡ [Corrigé] ★★☆

On considère une urne avec une boule noire et une boule blanche. À chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne, en ajoutant de plus une boule noire. On note Y la variable aléatoire donnant le rang de la première boule noire tirée.

1. Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Quelle est la probabilité de ne jamais tirer de boule noire ?
3. La variable Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
4. La variable Y admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Exercice 12. [Corrigé] ★★☆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la probabilité que X prenne une valeur paire.

   Indication : on pourra exprimer le résultat en fonction de la fonction $\mathrm{ch} : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. En déduire la loi et l'espérance de la variable $Y = (-1)^X$.

Exercice 13. Problème du collectionneur [Corrigé] ★★☆

Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier, $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, la loi de la variable $X_{k+1} - X_k$?
2. En déduire l'espérance de X_N.

Exercice 14. [Corrigé] ★★★

Dans une urne figurent N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$). On tire successivement avec remise des boules dans l'urne jusqu'à l'obtention d'une série de k boules consécutives identiques ($k \geqslant 2$).

On admet qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête et on note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'arrêt du processus.

Pour tout $i \geqslant 2$, on note A_i l'événement : “le numéro tiré au i-ème tirage est égal au numéro du tirage précédent”.

1. Écrire en `Python` une fonction qui simule la réalisation de la variable aléatoire T.
2. Calculer $\mathbb{P}(T = k)$ et $\mathbb{P}(T = k + 1)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(T = n + k) = \dfrac{N-1}{N^k}\mathbb{P}(T > n)$.
4. On admettra le résultat suivant (à démontrer dans cet exercice) : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge, alors X admet une espérance et :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$
   En déduire que T admet une espérance égale à $\dfrac{N^k - 1}{N - 1}$.

Exercice 15. [Corrigé] ★★★

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue au hasard une suite de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole comme suit.

- À chaque tirage, si les deux boules portent le même numéro, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée.
- Si les deux boules tirées ne portent pas le même numéro, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout entier naturel k non nul, on note T_i la variable aléatoire égale à k si exactement k tirages ont été nécessaires pour constituer i paires.

On admet qu'il existe un espace probabilisé permettant de modéliser l'expérience et que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. a. Déterminer et reconnaitre la loi de T_1. Donner sans calcul son espérance.

b. Écrire une fonction en Python simulant la réalisation de la variable aléatoire T_1.

2. On pose $X_1 = T_1$ et, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.

   a. Que représente la variable X_i ?

   b. Déterminer, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, la loi et l'espérance de X_i.

   c. En déduire que T_n admet une espérance et $\mathbb{E}(T_n) = n^2$.

3. On effectue une série de n tirages de deux boules selon le protocole précédent, et on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires constituées lors de ces n tirages.

   a. Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$.

   c. Montrer que $\mathbb{P}(S_n = n) = \dfrac{n!2^n}{(2n)!}$.

Exercice 16. [Corrigé] ★★★

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois "face" et au moins une fois "pile".

1. Montrer qu'il est presque sûr que le jeu s'arrête.

2. On note X le nombre de lancers avant que le jeu ne cesse.

   a. Déterminer la loi de X.

   b. Montrer que X admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 17. Lois discrètes sans mémoire [Corrigé] ★★★

Montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la condition d'absence de mémoire suivante :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k),$$

alors X suit une loi géométrique.

Exercice 18. [Corrigé] ★★★

On dispose d'une pièce déséquilibrée, amenant pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour tout entier naturel n non nul, on note $a_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4, puis montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, $a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{2}{9}a_{n-2}$.

2. Exprimer a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Vérifier que la série de terme général a_n converge et a pour somme 1. Qu'en déduire ?

4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 19. [Corrigé] ★★★

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge, alors X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

2. Montrer que, si X admet une espérance, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X > n)$ converge et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

3. Conclure.

Exercice 20. Fonctions génératrices [Corrigé] ★★★

On appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ la fonction

$$G_X : t \mapsto \mathbb{E}(t^X).$$

1. Montrer que toute fonction génératrice est définie sur $[-1, 1]$.

2. Calculer la fonctions génératrice de la variable X lorsque :

   a. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$,

   b. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$,

   c. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ $(p \in]0, 1[)$,

   d. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

1. Remarquons tout d'abord qu'il y a équiprobabilité des tirages et que le cardinal de l'univers de l'expérience est $\text{card}(\Omega) = \binom{26}{5}$. Remarquons ensuite que $X(\Omega) = [\![0,5]\!]$. Soit $k \in [\![0,5]\!]$. Choisir cinq jetons dont k voyelles revient à choisir k voyelles parmi les 6 (il y a $\binom{6}{k}$ choix) et $5-k$ consommes parmi les 20 disponibles (il y a $\binom{20}{5-k}$ choix). Ainsi $\text{card}([X=k]) = \binom{6}{k}\binom{20}{5-k}$. La loi de X est donc donnée par :
$$\forall k \in [\![0,5]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{\text{card}([X=k])}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{6}{k}\binom{20}{5-k}}{\binom{26}{5}}.$$
2. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès ("on range une paire dans le premier tiroir") lors de la répétition de 20 expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre de succès $p = \frac{1}{3}$. Ainsi X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(20, \frac{1}{3}\right)$.
3. Il y a équiprobabilité dans le choix des animaux, donc X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![0,2]\!])$.
4. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès ("obtenir une fille") lors de la répétition de 3 expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre de succès $p = \frac{1}{2}$. Ainsi X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$.
5. Remarquons tout d'abord qu'il y a équiprobabilité des choix des individus et que le cardinal de l'univers de l'expérience est $\text{card}(\Omega) = \binom{9}{6}$. Remarquons ensuite que $X(\Omega) = [\![1,4]\!]$. Soit $k \in [\![1,4]\!]$. Choisir 6 personnes dont k femmes revient à choisir k femmes parmi les 4 (il y a $\binom{4}{k}$ choix) et $6-k$ hommes parmi les 5 disponibles (il y a $\binom{5}{6-k}$ choix). Ainsi $\text{card}([X=k]) = \binom{4}{k}\binom{5}{6-k}$. La loi de X est donc donnée par :
$$\forall k \in [\![1,4]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{\text{card}([X=k])}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{4}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{9}{6}}.$$

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

Remarquons que $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note B_k l'événement "on tire une boule blanche au k-ème tirage. Alors :
$$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\ [X=k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap \overline{B_k}.$$
En appliquant la formule des probabilités composées, on trouve :
$$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{n-(k-2)-2}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

La variable aléatoire X est finie donc Y aussi. La variable aléatoire Y admet donc une espérance d'après le théorème du transfert, égale à :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ où } q = 1-p \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k q^{n-k} \\
&\underset{i=k+1}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} p^{i-1} q^{n+1-i} \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\left((p+q)^{n+1} - q^{n+1}\right) \text{ d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{p(n+1)}.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

Il vient immédiatement que $Y(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [\![0, n]\!] = \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule des probabilités totales avec $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ pour système complet d'événements, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = k) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}_{[X=n]}(Y = k) \quad (\text{car } \forall n < k,\ \mathbb{P}_{[X=n]}(Y = k) = 0) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{j}}{j!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \quad \text{(on reconnait une série exponentielle)} \\
&= \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda}.
\end{aligned}$$

On en déduit que Y suit la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.