Exercice 1

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$, où $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On pose $T_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} X_k$.

1. Écrire une fonction Python prenant en argument p et n et simulant la loi de T_n.
2. a. Calculer l'espérance et la variance de X.
   b. Donner l'espérance de T_n. En déduire la loi de T_n.
3. a. On pose $u_n = \mathbb{P}(T_n = 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
   $$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = (2p - 1)u_n + 1 - p.$$
   b. Retrouver la loi de T_n.

Exercice 2

On dit qu'une matrice carrée est symétrique (resp. antisymétrique) si elle est égale (resp. opposée) à sa transposée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note respectivement $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et et l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\} \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est de dimension 6 et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est de dimension 3.
4. Bonus : donner sans justification les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3

1. Calculer le rang de la famille $(\sin, \cos)$.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose :
   $$f : x \mapsto \sin(x + a),\ g : x \mapsto \sin(x + b) \text{ et } h : x \mapsto \sin(x + c).$$
   Justifier que la famille (f, g, h) est liée. *On attend ici une démonstration élégante et non de la virtuosité calculatoire.*

* *
*