

Exercice 1

```

1. import random as rd

def simuleT(n,p):
    t = 1
    for k in range(n+1):
        if rd.random() > p: # réalisé avec la probabilité 1-p
            t = -t
    return t

```

2. a. La variable X étant finie, elle admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = 1\mathbb{P}(X = 1) - 1\mathbb{P}(X = -1) = p - q.$$

La variable X^2 étant constante égale à 1, on a $\mathbb{E}(X^2) = 1$. D'après la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - (p - q)^2 = 4pq$.

- b. Les variables aléatoires $X_0, \dots, X_n$ étant indépendantes et admettant une espérance, T_n admet aussi une espérance et $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(X_0) \dots \mathbb{E}(X_n) = (p - q)^{n+1}$. Puisque $T_n(\Omega) = \{-1; 1\}$, $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{P}(T_n = 1) - \mathbb{P}(T_n = -1) = 2\mathbb{P}(T_n = 1) - 1$. On en déduit que la loi de T_n est donnée par $\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1 + (p - q)^{n+1}}{2}$ et $\mathbb{P}(T_n = -1) = \frac{1 - (p - q)^{n+1}}{2}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $([X_{n+1} = -1], [X_{n+1} = 1])$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= \mathbb{P}(T_{n+1} = 1) \\
 &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, T_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1, T_{n+1} = 1) \\
 &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, T_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1, T_n = -1) \\
 &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(T_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1)\mathbb{P}(T_n = -1) \\
 &= pu_n + q(1 - u_n) = (2p - 1)u_n + 1 - p,
 \end{aligned}$$

la pénultième ligne étant obtenue par indépendance de X_{n+1} et T_n (d'après le lemme des coalitions).

- b. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique dont $\frac{1}{2}$ est le point fixe. Après calculs, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(2p - 1)^{n+1}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + (p - q)^{n+1}}{2}$. On retrouve bien la loi de T_n .

Exercice 2

1. Par définition, les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice nulle 0_n est symétrique et antisymétrique : $0_n^T = 0_n = -0_n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$.

$$(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T = \lambda A + B.$$

On en déduit que $\lambda A + B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(C, D) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$.

$$(\lambda C + D)^T = \lambda C^T + D^T = -\lambda C - D = -(\lambda C + D)$$

On en déduit que $\lambda C + D \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Les sous-ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc bien des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$. Ainsi $M^T = S^T + A^T = S - A$. On trouve alors que :

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \text{ et } A = \frac{1}{2}(M - M^T),$$

garantissant l'unicité du couple (S, A) .

Synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons :

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \text{ et } A = \frac{1}{2}(M - M^T),$$

En remarquant que $S + A = M$, $S^T = S$ et $A^T = -A$, on trouve bien que M s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

On en déduit que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T = M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d = b \\ g = c \\ h = f \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & j \end{pmatrix}, (a, b, c, e, f, j) \in \mathbb{R}^6 \right\} \\ &= \{ aE_{1,1} + b(E_{1,2} + E_{2,1}) + c(E_{1,3} + E_{3,1}) + eE_{2,2} + f(E_{2,3} + E_{3,2}) + jE_{3,3}, (a, b, c, e, f, j) \in \mathbb{R}^6 \} \\ &= \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,2}, E_{2,3} + E_{3,2}, E_{3,3}).\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}aE_{1,1} + b(E_{1,2} + E_{2,1}) + c(E_{1,3} + E_{3,1}) + eE_{2,2} + f(E_{2,3} + E_{3,2}) + jE_{3,3} &= 0_3 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & j \end{pmatrix} &= 0_3 \\ \Leftrightarrow a = b = c = e = f = j &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,2}, E_{2,3} + E_{3,2}, E_{3,3})$ est une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension 6.

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

$$M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T = -M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e = j = 0 \\ d = -b \\ g = -c \\ h = -f \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \{ b(E_{1,2} - E_{2,1}) + c(E_{1,3} - E_{3,1}) + f(E_{2,3} - E_{3,2}), (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \} \\ &= \text{Vect}(E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,3} - E_{3,1}, E_{2,3} - E_{3,2}).\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}b(E_{1,2} - E_{2,1}) + c(E_{1,3} - E_{3,1}) + f(E_{2,3} - E_{3,2}) &= 0_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \\ \Leftrightarrow b = c = f.\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $(E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,3} - E_{3,1}, E_{2,3} - E_{3,2})$ est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension 3.

4. On vérifie de la même manière qu'à la question précédente que la famille

$$(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$$

est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. En effet :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=2}^n (j-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

On vérifie de la même manière qu'à la question précédente que la famille

$$(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$$

est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 3

1. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u \cos + v \sin = 0$. En évaluant en 0 et $\frac{\pi}{2}$, on trouve que $u = v = 0$, montrant ainsi que la famille $(\sin, \cos)$ est libre.
2. À l'aide des formules d'addition de trigonométrie, on trouve que les fonctions f , g et h appartiennent à $\text{Vect}(\sin, \cos)$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \cos(a) \sin(x) + \sin(a) \cos(x) \\ g(x) &= \cos(b) \sin(x) + \sin(b) \cos(x) \\ h(x) &= \cos(c) \sin(x) + \sin(c) \cos(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Vect}(f, g, h) \subset \text{Vect}(f, g)$. On en déduit que :

$$\text{rg}(f, g, h) = \dim \text{Vect}(f, g, h) \leq \dim \text{Vect}(\sin, \cos) = 2 \neq 3$$

On en déduit que (f, g, h) est liée.

$$\begin{matrix} * & * \\ & * \end{matrix}$$