

Exercice 1

On propose ici trois solutions dont les approches sont sensiblement différentes (la première solution est évidemment la meilleure).

- Le principe est ici d'utiliser la définition par compréhension de listes en Python :

```
def index_assemble(L):
    return [[L[j][i] for j in range(len(L)) for i in range(len(L[0]))]
```

- Le principe est ici de parcourir chaque sous-liste de la liste passée en argument et d'ajouter chacun des ses éléments dans les sous-listes de la liste renvoyée.

On commence par initialiser la liste L2 à renvoyer en une liste de listes vides (il y a autant de listes vides que d'éléments de la première sous-liste de L).

On parcourt ensuite chaque sous-liste, qu'on parcourt séquentiellement. On ajoute chacun de ses éléments dans les sous-listes de L2 selon la règle suivante : le k -ème élément d'une sous-liste est ajouté à la k -ème sous-liste de L2.

```
def index_assemble(L):
    L2 = [[] for k in range(len(L[0]))]
    for sous_liste_L in L:
        for k in range(len(L[0])):
            L2[k].append(sous_liste_L[k])
    return L2
```

- Le principe est ici de remplir chaque sous-liste de la liste renvoyée avant de remplir la suivante. On commence par initialiser la liste L2 une liste vide. Pour remplir chaque sous-liste d'indice k de la liste L2, on récupère tous l'élément d'indice k de chaque sous-liste de L.

```
def index_assemble(L):
    L2 = []
    for k in range(len(L[0])):
        sous_liste_L2 = []
        for liste in L:
            sous_liste_L2.append(liste[k])
        L2.append(sous_liste_L2)
    return L2
```

Exercice 2

- La fonction P est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = 3x^2 - 1 = 3 \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, on peut dresser le tableau de variations de la fonction P :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$P'(x)$	+	0	-	+
$P(x)$	$-\infty$	$P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$+\infty$

Remarquons que :

$$P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0.$$

L'étude des variations garantit alors que la fonction P est strictement positive (donc ne s'annule pas) sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty \right[$. Puisque la fonction P est continue strictement croissante sur $\left] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right[$, elle réalise une bijection de $I = \left] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right[$ vers $J = \left] -\infty, P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right[$.

Puisque $0 \in J$, le polynôme P admet une unique racine réelle.

- Remarquons que $P(-1) = 1 > 0 = P(\alpha)$. Puisque la fonction P est strictement croissante sur l'intervalle I et puisque $(-1, \alpha) \in I^2$, $\boxed{\alpha < -1}$.
- Puisque le polynôme P est unitaire (son coefficient dominant est égal à 1) et puisqu'on connaît toutes ses racines, on peut le factoriser :

$$P = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma.$$

Par identification des coefficients (des monômes de degré 0 et 2), on trouve que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $-\alpha\beta\gamma = 1$, i.e. :

$$\boxed{\beta + \gamma = -\alpha \text{ et } \beta\gamma = -\frac{1}{\alpha}.$$

4. Puisque le polynôme P est à coefficients réels, $\bar{\beta}$ est aussi racine de P . Puisque α est l'unique racine réelle de P , β n'est pas un réel et ainsi $\bar{\beta}$ non plus. On en déduit donc que $\gamma = \bar{\beta}$, i.e. β et γ sont complexes conjugués.

On en déduit que :

$$|\beta|^2 = \beta\bar{\beta} = \beta\gamma = -\frac{1}{\alpha} < 1.$$

De la même manière, on trouve que $|\gamma|^2 = -\frac{1}{\alpha}$ et ainsi que $\boxed{|\beta| = |\gamma| < 1.}$

5. Remarquons que :

$$0 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha(\beta + \gamma) + 2\beta\gamma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2 - \frac{2}{\alpha}.$$

On en déduit que :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\frac{\alpha^3 + 1}{\alpha}.$$

Puisque α est racine de P , $\alpha^3 - \alpha + 1 = 0$ et ainsi $\alpha^3 + 1 = \alpha$. On trouve alors bien que $\boxed{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2.}$

Exercice 3

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En reconnaissant une somme télescopique, on obtient :

$$\sum_{n=1}^N x_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\gamma} - \frac{1}{(n+1)^\gamma} = 1 - \frac{1}{(N+1)^\gamma} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

On en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ converge et : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = 1.}$

2. Remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\gamma - 1}{(n+1)^\gamma}.$$

Or :

$$(1+u)^\gamma - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \gamma u \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\gamma - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\gamma}{n}$ et :

$$\boxed{x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\gamma}{n^{\gamma+1}}.}$$

3. Soit $\alpha > 1$. En posant $\gamma = \alpha - 1$, on a $\gamma > 0$. On applique alors le résultat de la question précédente :

$$\frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\gamma+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x_n}{\gamma}.$$

Puisque la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ converge, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x_n}{\gamma}$ converge aussi.

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^\alpha} > 0$, on peut appliquer le critère d'équivalence des séries à termes positifs : pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 4 (extrait d'Agro MCR 2025)

Remarquons que l'intégrale $I_{a,b}$ existe car $f_{a,b}$ est continue (car polynomiale) sur $[0, 1]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{0,n} = \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[\frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Pour tout entier naturel n , calculer $I_{0,n}$.

2. Les fonctions $u : x \mapsto x^a$ et $v : x \mapsto \frac{-1}{b+1} (1-x)^{b+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et :

$$\forall x \in [0, 1], u'(x) = ax^{a-1} \text{ et } v'(x) = (1-x)^b.$$

Ainsi, par intégration par parties, on trouve :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \left[\frac{-1}{b+1} x^a (1-x)^{b+1} \right]_0^1 + \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b+1} dx.$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{I_{a,b} = \frac{a}{b+1} I_{a-1,b+1}.$$

3. Démontrons le résultat par récurrence sur $a \in \mathbb{N}$.

L'initialisation a été prouvée à la question 1 :

$$\forall b \in \mathbb{N}, I_{0,b} = \frac{1}{b+1} = \frac{0!b!}{(0+b+1)!}.$$

Soit $a \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout entier naturel c , $I_{a,c} = \frac{a!c!}{(a+c+1)!}$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall b \in \mathbb{N}, I_{a+1,b} = \frac{a+1}{b+1} I_{a,b+1}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on trouve alors :

$$\forall b \in \mathbb{N}, I_{a+1,b} = \frac{a+1}{b+1} \times \frac{a!(b+1)!}{(a+(b+1)+1)!} = \frac{(a+1)!b!}{((a+1)+b+1)!},$$

ce qui prouve l'hérédité. On en déduit que :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, I_{a,b} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

4. D'après la question précédente, on a :

$$\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+3)!} \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{4n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4}.$$

On en déduit immédiatement que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \frac{1}{4}$.

5. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} = \ell$ si : $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.}$

6. En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{4}$ à la limite obtenue à la question 4, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $\left| \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} - \frac{1}{4} \right| \leq \frac{1}{4}$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$, i.e. $\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leq \frac{1}{2}$.

Il existe donc bien un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leq \frac{1}{2}$.

7. On montre le résultat par récurrence sur $n \geq n_0$.

La propriété est triviale pour $n = n_0$. Supposons, que pour un entier $n \geq n_0$, on ait $I_{n,n} \leq \frac{2^{n_0} I_{n_0,n_0}}{2^n}$.

D'après la question précédente, $I_{n+1,n+1} \leq \frac{1}{2} I_{n,n}$ car $I_n \geq 0$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, on a :

$$I_{n+1,n+1} \leq \frac{2^{n_0} I_{n_0,n_0}}{2^{n+1}},$$

ce qui conclut la preuve de l'hérédité. On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \geq n_0, I_{n,n} \leq \frac{2^{n_0} I_{n_0,n_0}}{2^n}.$$

8. Puisque la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$), la série de terme général $\frac{2^{n_0} I_{n_0,n_0}}{2^n}$ converge. Puisque la suite $(I_{n,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, la série de terme général $I_{n,n}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

9. a. Pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\ln \left(\frac{2n}{2n+1} \right) = \ln \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n+1} = 0$, on trouve que :

$$\boxed{\ln \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n+1}.$$

b. On en déduit que :

$$(2n+1) \ln \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1,$$

et ainsi que : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left((2n+1) \ln \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \right) = e^{-1}.$

c. D'après la formule de Stirling et le résultat de la question 3, on trouve que :

$$4^n I_{n,n} = 4^n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n+1} \pi n^{2n+1} e^{-2n}}{(2n+1)^{2n+1} e^{-2n-1} \sqrt{2\pi(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+1} \frac{e\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$

En reformulant le résultat de la question précédente, on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+1} = e^{-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{4^n I_{n,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$

- d. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \geq 0$. Puisque la série harmonique diverge, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge par comparaison de séries à termes positifs. On en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge par linéarité. Puisque $4^n I_{n,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$, la série de terme général $4^n I_{n,n}$ diverge par critère d'équivalence des séries à termes positifs.

Exercice 5

1. a. Soit F l'événement "la banane est en plastique".

Remarquons que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(T_i) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}_{T_i}(F) = \frac{i}{n+1}$ par équiprobabilités des tirages. Puisque la famille $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(F) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(T_i) \times \mathbb{P}_{T_i}(F) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{i}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité que la banane soit en plastique est donc égale à $\frac{1}{2}$.

- b. Avec les mêmes notations que précédemment, on cherche à calculer $\mathbb{P}_F(T_i)$. Par définition, on a :

$$\mathbb{P}_F(T_i) = \frac{\mathbb{P}(F \cap T_i)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(T_i) \mathbb{P}_{T_i}(F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{1}{n} \times \frac{i}{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2i}{n(n+1)}.$$

La probabilité que la banane vienne du tas n° i sachant qu'elle est en plastique

$$\text{est } \frac{2i}{n(n+1)}.$$

2. a. (i) On note M_k l'événement "Bernard a tiré une banane mangeable au k -ème tirage". On cherche donc la probabilité de l'événement $M_1 \cap M_2 \cap M_3$ sachant qu'il a choisi le tas n° i . Puisqu'il y a remise après chaque tirage, on peut donc considérer les tirages comme mutuellement indépendants, **une fois le tas n° i fixé**. Ainsi :

$$\mathbb{P}_{T_i}(M_1 \cap M_2 \cap M_3) = \mathbb{P}_{T_i}(M_1) \times \mathbb{P}_{T_i}(M_2) \times \mathbb{P}_{T_i}(M_3) = \left(\frac{n+1-i}{n+1} \right)^3.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité d'avoir obtenu trois bananes mangeables sachant que Bernard a choisi le tas n° i est $\left(\frac{n+1-i}{n+1} \right)^3$.

- (ii) Puisque la famille $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements, on en déduit, d'après la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap M_3) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(T_i) \mathbb{P}_{T_i}(M_1 \cap M_2 \cap M_3) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{(n+1-i)^3}{(n+1)^3} \\ &= \frac{1}{n(n+1)^3} \sum_{k=1}^n k^3 \quad (\text{en posant } k = n+1-i) \\ &= \frac{1}{n(n+1)^3} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n}{4(n+1)}. \end{aligned}$$

La probabilité d'avoir obtenu trois bananes mangeables est $\frac{n}{4(n+1)}$.

- b. Avec les notations précédentes, on peut écrire A comme la réunion disjointe suivante :

$$A = (\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap M_3) \cup (\overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3}) \cup (M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}).$$

En effet, si Bernard a tiré exactement deux bananes en plastique, alors il a tiré une banane mangeable ou bien au premier tirage, ou bien au second ou bien au troisième.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la formule des probabilités composées - ou l'indépendance des tirages sous la loi $\mathbb{P}_{T_i}$ - (appliquée trois fois) assure que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{T_i}(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap M_3) &= \mathbb{P}_{T_i}(M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) \\ &= \mathbb{P}_{T_i}(\overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3}) \\ &= \frac{i^2(n+1-i)}{(n+1)^3}. \end{aligned}$$

Ainsi en appliquant successivement la formule des probabilités totales aux événements $\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap M_3$, $M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}$ et $\overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap M_3) + P(M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) + P(\overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3}) \\ &= 3 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{i^2(n+1-i)}{(n+1)^3} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{3i^2}{n(n+1)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{3i^3}{n(n+1)^3} \\ &= \frac{3}{n(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{3}{n(n+1)^3} \sum_{i=1}^n i^3 \\ &= \frac{3}{n(n+1)^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{n(n+1)^3} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{2n+1}{2(n+1)} - \frac{3n}{4(n+1)} \\ &= \frac{n+2}{4(n+1)}\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \frac{3i^2(n+1-i)}{n(n+1)^3} = \frac{n+2}{4(n+1)}.$$

3. a. Notons B l'événement "Bernard a tiré k bananes mangeables".
Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il y a $\binom{n+1-i}{k}$ façons de tirer simultanément k bananes mangeables dans le tas n° i .
Par équiprobabilités des tirages simultanés, et puisqu'il y a $\binom{n+1}{k}$ tirages au total, on trouve :

$$\mathbb{P}_{T_i}(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n+1-i \\ \frac{\binom{n+1-i}{k}}{\binom{n+1}{k}} & \text{si } k \leq n+1-i \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > n+1-k \\ \frac{\binom{n+1-i}{k}}{\binom{n+1}{k}} & \text{si } i \leq n+1-k \end{cases}$$

Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales avec le même système complet d'événements, on trouve :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(T_i) \mathbb{P}_{T_i}(B) = \frac{1}{n \binom{n+1}{k}} \sum_{i=1}^{n+1-k} \binom{n+1-i}{k} \underset{j=n+1-i}{=} \frac{1}{n \binom{n+1}{k}} \sum_{j=k}^n \binom{j}{k}.$$

La probabilité que Bernard ait tiré simultanément k bananes en plastique est :

$$\frac{1}{n \binom{n+1}{k}} \sum_{i=k}^n \binom{i}{k}.$$

- b. $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons le résultat par récurrence sur $n \geq k$.

- Initialisation : pour $n = k$, on a

$$\sum_{i=k}^k \binom{i}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}.$$

La récurrence est initialisée.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq k$. On suppose que $\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Alors :

$$\sum_{i=k}^{n+1} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k} + \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}.$$

- Conclusion :

$$\forall n \geq k, \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Le résultat est en particulier vrai pour $n \geq 3$.

On pouvait aussi montrer directement la propriété grâce à la formule du triangle de Pascal :

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^n \left[\binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} \right] = \binom{n+1}{k+1} - \binom{k}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

- c. On en déduit alors que :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{n \binom{n+1}{k}} \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n \binom{n+1}{k}} = \frac{n+1-k}{n(k+1)}.$$

* *
*