

Questions de cours

1. Énoncer l'inégalité triangulaire pour les séries.
2. Énoncer la formule des probabilités totales.
3. Énoncer la caractérisation d'une racine multiple d'un polynôme.

Exercice 1

Écrire en Python une fonction `index_assemble` prenant en argument une liste de listes de nombres `L` (de mêmes longueurs) et qui renvoie une liste de listes dont la première sous-liste est composée des premiers éléments de chaque sous-liste de `L`, la deuxième sous-liste est composée des deuxièmes éléments de chaque sous-liste de `L`, et ainsi de suite...
Par exemple, l'instruction `index_assemble([[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8]])` devra renvoyer `[[1, 5], [2, 6], [3, 7], [4, 8]]`.

Exercice 2

On considère le polynôme $P = X^3 - X + 1$.

1. Montrer que P admet une unique racine réelle, qu'on notera α . *On étudiera la fonction $P : x \mapsto x^3 - x + 1$ sur $\mathbb{R}$.*
2. Justifier que $\alpha < -1$.
3. Notons β et γ les deux autres racines non nécessairement distinctes de P . Exprimer $\beta + \gamma$ et $\beta\gamma$ en fonction de α .
4. Justifier que β et γ sont complexes conjugués. En déduire que $|\beta| = |\gamma| < 1$.
5. Montrer que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2$.

Exercice 3

Soit γ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_n = \frac{1}{n^\gamma} - \frac{1}{(n+1)^\gamma}$

1. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ converge et calculer sa somme.
2. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\gamma}{n^{\gamma+1}}$.
3. En déduire que, pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 4 (extrait d'Agro MCR 2025)

Soient a et b deux entiers naturels. On définit :

$$f_{a,b} : x \mapsto x^a(1-x)^b \quad \text{et} \quad I_{a,b} = \int_0^1 f_{a,b}(x) \, dx.$$

1. Pour tout entier naturel n , calculer $I_{0,n}$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \neq 0$. Trouver une relation entre $I_{a,b}$ et $I_{a-1,b+1}$.
3. En déduire que, pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{a,b} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}}$.

5. Soit u une suite réelle et ℓ un réel. Donner la définition, avec quantificateurs, de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
6. En déduire l'existence d'un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leq \frac{1}{2}$.
7. En déduire que, pour tout $n \geq n_0$, $I_{n,n} \leq \frac{2^{n_0} I_{n_0,n_0}}{2^n}$.
8. Déterminer la nature de la série de terme général $I_{n,n}$.
9.
 - a. Déterminer un équivalent de $\ln \left(\frac{2n}{2n+1} \right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - b. En déduire la limite de $\exp \left((2n+1) \ln \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - c. Déterminer un équivalent de $4^n I_{n,n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ à l'aide de la **formule de Stirling** :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$
 - d. En déduire la nature de la série de terme général $4^n I_{n,n}$.

Exercice 5

Le cirque où travaillent les singes Albert et Bernard décide de nourrir ses ouistitis. On leur donne n tas de $n+1$ bananes. Albert, qui trouve que Bernard mange trop, a décidé de lui jouer un tour (ils sont espiègles ces ouistitis !) : il a remplacé certaines bananes par des imitations en plastique plus vraies que nature. Plus précisément, dans le tas n° i , il a remplacé i bonnes bananes bien mûres par i bananes en plastique immangeables.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le tas n° i contient donc $n+1$ bananes, dont i en plastique et $n+1-i$ vraies bananes. Dans tout l'exercice, on pourra utiliser les événements T_i : "Bernard a choisi le tas n° i ", ainsi que tout événement que vous définirez correctement.

1. Bernard a faim. Il choisit un tas au hasard puis en tire une banane au hasard.
 - a. Déterminer la probabilité que la banane soit en plastique.
 - b. La banane est en plastique. Calculer la probabilité qu'elle vienne du tas n° i .
2. Bernard trouve ça bizarre, ces bananes en plastique. Il choisit un tas au hasard, et y tire successivement trois bananes, en les remettant dans le tas après les avoir tirées.
 - a. (i) Déterminer, en fonction de $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité d'avoir obtenu trois bananes mangeables sachant que Bernard a choisi le tas n° i .
 - (ii) En déduire la probabilité d'avoir obtenu trois bananes mangeables.
 - b. Soit A l'événement "Bernard a tiré exactement deux bananes en plastique".
 Montrer que $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \frac{3i^2(n+1-i)}{n(n+1)^3}$ puis calculer $\mathbb{P}(A)$.
3. Bernard commence à avoir très faim. Il choisit un tas au hasard, et en tire simultanément k bananes simultanément.
 - a. Calculer la probabilité que Bernard ait k bananes mangeables. (On gardera le résultat sous forme de somme)
 - b. Démontrer que, pour tout $n \geq 3$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

- c. Simplifier alors l'expression obtenue à la question 3.a.

* *

*