

**Exercice 1.** ♡

Calculer le rang des matrices ci-dessous. Dans le cas où elles sont inversibles, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** ♡

On considère les applications suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x - y, x, x + y) \quad \text{et} \quad (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x - y + 3z)$$

1. a. Montrer que  $f$  est une application linéaire.  
b. Déterminer son noyau, son image et son rang.  
c. L'application  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Même question pour l'application  $g$ .

**Exercice 3.** ♡

Montrer à l'aide d'une application linéaire bien choisie que l'ensemble  $E$  défini ci-dessous est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$$

**Exercice 4.** ♡

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer le rang de la matrice  $A$ . Que peut-on en déduire ?
2. Calculer  $(A - I_3)(A + 3I_3)$ . En déduire que  $A^{-1}$ .
3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $A^n = u_n A + v_n I_3$ .
4. Exprimer  $u_n$  et  $v_n$  puis  $A^n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

[\[Corrigé\]](#) ★☆☆**Exercice 5.** ♡

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que :

- (i)  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \Leftrightarrow \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$ .
- (ii)  $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \Leftrightarrow \forall z \in E, \exists (x, y) \in \text{Ker } f \times \text{Im } f, z = x + y$ .

**Exercice 6.**[\[Corrigé\]](#) ★★☆☆

Soient  $a$  un réel et  $n$  un entier naturel. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = (X - a)(P' + P'(a)) - 2(P - P(a)).$$

1. Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Déterminer la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
3. Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (1, (X - a), \dots, (X - a)^n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
Déterminer la matrice  $D$  de  $f$  dans cette base.
4. Quelle relation existe-t-il entre  $A$  et  $D$  ? *On pourra remarquer que  $f = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} \circ f \circ \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ .*

**Exercice 7.**[\[Corrigé\]](#) ★★☆☆

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 5f + 6\text{Id}_E = 0$ .

1. Calculer  $(f - 2\text{Id}_E) \circ (f - 3\text{Id}_E)$  et  $(f - 3\text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E)$ .
2. En déduire que :

$$\forall z \in E, \exists (x, y) \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \times \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E), z = x + y.$$

**Exercice 8.**[\[Corrigé\]](#) ★★★

Soit  $f$  un endomorphisme non nul d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension 3 tel que  $f^2 = 0$ .

1. Comparer  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ .
2. En déduire le rang de  $f$  et la dimension de son noyau.
3. En déduire qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*On construira la base  $\mathcal{B}$  en commençant par considérer un vecteur  $c \in E \setminus \text{Ker } f$ .*

**Exercice 9. Oaux 2010**[\[Corrigé\]](#) ★★★

Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions réelles à valeurs réelles, on considère le sous-espace vectoriel  $F$  engendré par les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  où :

$$f_1 : x \mapsto e^{-x}, \quad f_2 : x \mapsto (x-1)e^{-x}, \quad f_3 : x \mapsto (x^2+1)e^{-x}.$$

1. Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $F$ .
2. À toute fonction  $f$  de  $F$ , on associe la fonction  $\Phi(f)$  définie par  $\Phi(f) = f'$ .  
Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $F$ , puis écrire la matrice  $A$  de  $\Phi$  dans  $\mathcal{B}$ .
3. Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (on pourra écrire  $A = -I_3 + J$ ).

**Exercice 10.**[\[Corrigé\]](#) ★★★

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-1} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que l'application  $f : P(X) \mapsto P(1-X)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .  
*Attention, le polynôme  $f(P)$  n'est pas le résultat d'un produit mais d'une composition.*
2. Calculer  $A^2$  puis  $A^{-1}$ .

**Exercice 11. Oaux 2007**[\[Corrigé\]](#) ★★★

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la dimension des espaces  $\text{Ker}(f - \text{Id})$ ,  $\text{Ker}(f - 3\text{Id})$  et  $\text{Ker}(f - 3\text{Id})^2$ .
2. Montrer que, pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^3$ , il existe un unique couple de vecteurs  $(y, z) \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \times \text{Ker}(f - 3\text{Id})^2$  tel que  $x = y + z$ .

**Exercice 12. Oaux 2011**[\[Corrigé\]](#) ★★★

Soit  $u$  un endomorphisme non nul de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $u^3 = -u$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(u^2 + \text{Id}) \subset \text{Ker } u$ .
2. En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ , il existe un unique couple  $(y, z) \in \text{Ker } u \times \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$  tel que  $x = y + z$ .
3. Montrer que  $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}) \neq \{0\}$ .

**Exercice 13.**[\[Corrigé\]](#) ★★★

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^3 = 0$ .

Montrer que  $f + \text{Id}_E$  et  $f - \text{Id}_E$  sont des automorphismes de  $E$  et exprimer leurs réciproques respectives à l'aide de puissances de  $f$ .

**Exercice 14.**[\[Corrigé\]](#) ★★★

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

1. a. La matrice  $A$  est-elle inversible ?  
b. Calculer  $A^2$  et  $A^3$  et déterminer le rang de ces deux matrices.
2. a. Montrer que  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ .  
b. Déterminer  $\text{Ker } f$  et en donner une base ainsi que sa dimension.  
c. A-t-on  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$  ?
3. On note  $u = (-2, -1, 2)$ .  
a. Montrer qu'il existe  $v \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f(v) = u$  et dont la deuxième coordonnée est 1.  
b. Montrer qu'il existe  $w \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f(w) = v$  et dont la deuxième coordonnée est 1.  
c. Montrer que  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , puis écrire la matrice  $P$  de passage de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{B}'$ , i.e.  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id})$ .  
d. Justifier que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .  
e. Déterminer la matrice  $N$  de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$ . Quelle relation lie  $A$  et  $N$  ?
4. Pour tout  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on note :

$$C_B = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}.$$

- a. Montrer que, pour tout  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $C_B$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- b. Montrer que  $C_N = \text{Vect}(I_3, N, N^2)$ .
- c. Montrer que, pour tout  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on a

$$M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N.$$

- d. En déduire que  $C_A = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$ . Quelle est la dimension de  $C_A$  ?

**Exercice 15.**[\[Corrigé\]](#) ★★★

On note  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $D$  l'application qui, à toute fonction  $f$  de  $E$  associe  $f'$ . On considère les trois fonctions de  $E$  suivantes :

$$f_1 : t \mapsto e^t, \quad f_2 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad f_3 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

On note  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  et  $G = \text{Vect}(\mathcal{B})$ .

1. a. Montrer que  $\mathcal{B}$  est libre. Que peut-on en déduire ?

b. Montrer que pour tout  $f \in G$ ,  $D(f) \in G$ .

*On dit que  $G$  est stable par  $D$  et on note  $d$  l'endomorphisme induit par  $D$  sur  $G$ , i.e. :*

$$\begin{aligned} d : G &\rightarrow G \\ f &\mapsto D(f) = f'. \end{aligned}$$

c. Préciser la matrice  $M$  de  $d$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $G$ .

d. Calculer  $M^3$ . En déduire que  $M$  est inversible et préciser son inverse.

e. L'application  $d$  est-elle un automorphisme ? Si oui, expliciter  $d^{-1}$ .

2. On cherche à résoudre l'équation différentielle  $y^{(3)} = y$  (\*).

a. Montrer que si  $f$  est une fonction solution de (\*), alors  $f$  est dérivable trois fois et donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

b. Soit  $T = D^3 - \text{Id}_E$ . Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

c. Montrer que l'ensemble des solutions de (\*) est  $\text{Ker } T$ .

d. Montrer, sans calcul, que  $G \subset \text{Ker } T$ .

e. On veut désormais montrer l'inclusion réciproque, i.e.  $\text{Ker } T \subset G$ .

(i) Soit  $f$  une solution de (\*). On note  $g = f + f' + f''$ . Montrer que  $g' = g$ .

(ii) En déduire  $g$  puis  $f$ .

(iii) Conclure.

**Corrigé de l'exercice 1.** [Énoncé]

1. Après calculs, on trouve que  $\text{rg}(A) = 3$ . La matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est donc inversible. Soient  $(a, b, c, x, y, z) \in \mathbb{R}^6$ . Après calculs, on trouve que :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7y + 3z = a \\ 3x + 9y + 4z = b \\ x + 5y + 3z = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{3}a + 2b - \frac{1}{3}c \\ y = \frac{5}{3}a - b - \frac{1}{3}c \\ x = -2a + b + c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Après calculs, on trouve que  $\text{rg}(B) = 3$ .  
Puisque  $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , la matrice  $B$  n'est pas inversible.
3. Après calculs, on trouve que  $\text{rg}(C) = 3$ .  
Puisque  $C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , la matrice  $C$  n'est pas inversible.
4. Après calculs, on trouve que  $\text{rg}(D) = 2$ .  
Puisque  $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , la matrice  $D$  n'est pas inversible.

**Corrigé de l'exercice 2.** [Énoncé]

1. a. Soient  $u = (x, y)$ ,  $v = (x', y')$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda x + x' - \lambda y - y', \lambda x + x', \lambda x + x' + \lambda y + y') \\ &= \lambda(x - y, x, x + y) + (x' - y', x', x' + y') \\ &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

L'application  $f$  est donc bien linéaire :  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ .

- b. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$(x, y) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

On en déduit que  $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$ .

Puisque l'image d'une application linéaire est engendrée par l'image d'une base de l'espace de départ (si celui-ci est de dimension finie), on a :

$$\text{Im } f = \text{Vect} \left( f((1, 0)), f((0, 1)) \right) = \text{Vect} \left( (1, 1, 1), (-1, 0, 1) \right).$$

Les vecteurs  $(1, 1, 1)$  et  $(-1, 0, 1)$  n'étant pas colinéaires, ils forment une base de  $\text{Im } f$  (qui est donc de dimension 2). On propose ci-dessous trois méthodes pour déterminer le rang de l'application  $f$  :

- Par définition,  $\text{rg } f = \dim \text{Im } f = 2$ .
- Le rang de  $f$  est donné par le rang de sa matrice relativement aux bases canoniques (par exemple) de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  :

$$\text{rg } f = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

- Puisque  $\mathbb{R}^2$  (espace de départ) est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang à l'application linéaire  $f$  :

$$\text{rg } f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \text{Ker } f = 2.$$

- c. L'application  $f$  est injective car  $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$ .

L'application  $f$  n'est pas surjective car  $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$  (les deux espaces n'ont pas la même dimension).

L'application  $f$  n'est donc pas un isomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  (ce qu'on savait déjà puisque les deux espaces n'ont pas la même dimension).

2. a. La démonstration de la linéarité de  $g$  ne pose aucun problème.

- b. On trouve après calculs que  $\text{Ker } g = \text{Vect}((-4, 1, 3))$ .

Puisque l'image d'une application linéaire est engendrée par l'image d'une base de l'espace de départ (si celui-ci est de dimension finie), on a :

$$\text{Im } g = \text{Vect} \left( g((1, 0, 0)), g((0, 1, 0)), g((0, 0, 1)) \right) = \text{Vect} \left( (1, 2), (1, -1), (1, 3) \right).$$

Les vecteurs  $(1, 2)$  et  $(1, -1)$  n'étant pas colinéaires, ils engendrent un espace de dimension 2, donc  $\mathbb{R}^2$ . On en déduit que  $\text{Im } g = \mathbb{R}^2$ .

- Par définition,  $\text{rg } g = \dim \text{Im } g = 2$ .

- Le rang de  $g$  est donné par le rang de sa matrice relativement aux bases canoniques (par exemple) de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  :

$$\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

- Puisque  $\mathbb{R}^3$  (espace de départ) est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang à l'application linéaire  $g$  :

$$\operatorname{rg} g = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} g = 2.$$

c. L'application  $g$  n'est pas injective car  $\operatorname{Ker} g \neq \{(0, 0, 0)\}$ .

L'application  $g$  est pas surjective car  $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ .

L'application  $g$  n'est donc pas un isomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  (ce qu'on savait déjà puisque les deux espaces n'ont pas la même dimension).

### Corrigé de l'exercice 3. [\[Énoncé\]](#)

Remarquons que  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ).

On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f. \end{aligned}$$

L'application  $\varphi$  est bien une application linéaire (entre deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels) par linéarité de l'intégrale. L'ensemble  $E$  peut être alors vu comme le noyau de  $\varphi$  ; c'est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ , et donc un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

### Corrigé de l'exercice 4. [\[Énoncé\]](#)

- On trouve que  $\operatorname{rg}(A) = 3$ . Puisque  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , la matrice  $A$  est inversible.
- On trouve que  $(A - I_3)(A + 3I_3) = 0_3$ . En développant le membre de gauche, on trouve que  $A^2 + 2A - 3I_3 = 0_3$ , ou encore :

$$\frac{1}{3}(A + 2I_3) \times A = I_3.$$

On en déduit que  $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I_3)$ .

- Montrons le résultat par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

$A^0 = 0A + 1I_3$ , donc  $u_0 = 0$  et  $v_0 = 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons qu'il existe  $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $A^n = u_n A + v_n I_3$ .

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= u_n A^2 + v_n A \\ &= (-2u_n + v_n)A + 3u_n I_3 \\ &= u_{n+1}A + v_{n+1}I_3, \end{aligned}$$

où  $u_{n+1} = -2u_n + v_n$  et  $v_{n+1} = 3u_n$ .

La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3u_n.$$

Après calculs, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n).$$

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = 3u_{n-1}$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{4}(3 + (-3)^n).$$

*Attention : cette formule est encore vraie pour  $n = 0$  puisque  $v_0 = 1$ .*

On trouve alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)A + \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)I_3.$$

### Corrigé de l'exercice 5. [\[Énoncé\]](#)

### Corrigé de l'exercice 6. [\[Énoncé\]](#)

- Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (X - a)((\lambda P + Q)') + (\lambda P + Q)'(a) - 2((\lambda P + Q) - (\lambda P + Q)(a)) \\ &= \lambda[(X - a)(P' + P'(a)) - 2(P - P(a))] + (X - a)(Q' + Q'(a)) - 2(Q - Q(a)) \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a

$$(X - a)(P' + P'(a)) \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } 2(P - P(a)) \in \mathbb{R}_n[X],$$

donc  $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ .

On en déduit que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. On trouve que  $f(1) = f(X) = f(X^2) = 0$ , et pour tout  $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$  :

$$f(X^k) = 2 - ka^k + a^{k-1}kX - akX^{k-1} + (k-2)X^k.$$

La matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a^3 & -2a^4 & \dots & (2-n)a^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & 3a^2 & 4a^3 & \dots & na^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & -3a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & -4a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -na \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2 \end{pmatrix}$$

3. Les polynômes de la famille  $\mathcal{B}$  sont de degrés étagés, ils forment donc une famille libre. Puisque la famille  $\mathcal{B}$  est formée de  $n+1$  polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$ , qui est de dimension  $n+1$ ,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On trouve que  $f(1) = f(X-a) = 0$  et :

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, f((X-a)^k) = (k-2)(X-a)^k.$$

La matrice  $D$  de  $f$  dans cette base est donc :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & (0) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2 \end{pmatrix}$$

4. On note  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Puisque  $f = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} \circ f \circ \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ , on a :

$$\begin{aligned} A &= \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}(\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) \\ &= PDP^{-1} \text{ où } P = \text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

**Corrigé de l'exercice 7.** [Énoncé]

1. Par distributivité de la composition sur l'addition, on trouve que  $(f-2\text{Id}_E) \circ (f-3\text{Id}_E) = 0$  et  $(f-3\text{Id}_E) \circ (f-2\text{Id}_E) = 0$ .

2. Montrons le résultat par analyse-synthèse.

**Analyse.** Soit  $z \in E$ .

Supposons qu'il existe  $(x, y) \in \text{Ker}(f-2\text{Id}_E) \times \text{Ker}(f-3\text{Id}_E)$  tel que  $z = x + y$ .

Puisque  $x \in \text{Ker}(f-2\text{Id}_E)$ ,  $f(x) = 2x$ . Par un argument analogue, on a  $f(y) = 3y$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} (f-2\text{Id}_E)(z) &= (f-2\text{Id}_E)(y) = f(y) - 2y = y \\ (f-3\text{Id}_E)(z) &= (f-3\text{Id}_E)(x) = f(x) - 3x = -x, \end{aligned}$$

ce qui assure l'unicité des vecteurs  $x$  et  $y$ .

**Synthèse.** Soit  $z \in E$ . Posons  $x = -(f-3\text{Id}_E)(z)$  et  $y = (f-2\text{Id}_E)(z)$ .

D'après la question précédente, on a :

$$\text{Im}(f-3\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f-2\text{Id}_E) \text{ et } \text{Im}(f-2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f-3\text{Id}_E).$$

Puisque  $x \in \text{Im}(f-3\text{Id}_E)$  et  $y \in \text{Im}(f-2\text{Id}_E)$ , on en déduit que  $x \in \text{Ker}(f-2\text{Id}_E)$  et  $y \in \text{Ker}(f-3\text{Id}_E)$ . De plus :

$$x + y = -(f-3\text{Id}_E)(z) + (f-2\text{Id}_E)(z) = -f(z) + 3z + f(z) - 2z = z.$$

Pour tout  $z \in E$ , il existe donc un unique couple  $(x, y) \in \text{Ker}(f-2\text{Id}_E) \times \text{Ker}(f-3\text{Id}_E)$  tel que  $z = x + y$ .

**Corrigé de l'exercice 8.** [Énoncé]

1. Soit  $y \in \text{Im } f$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ . Ainsi  $f(y) = f^2(x) = 0_E$ , i.e.  $y \in \text{Ker } f$ . On en déduit que  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ .

2. Puisque  $E$  est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang :

$$\text{rg } f + \dim \text{Ker } f = \dim E = 3.$$

D'après la question précédente,  $\text{rg } f \leq \dim \text{Ker } f$  donc  $2\text{rg } f \leq \text{rg } f + \dim \text{Ker } f = 3$ . On en déduit que  $\text{rg } f = 0$  ou  $\text{rg } f = 1$ . Puisque  $f \neq 0$ ,  $\text{rg } f = 1$  et ainsi  $\dim \text{Ker } f = 2$ .

3. Raisonnons par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Supposons qu'il existe une base  $(a, b, c)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On en déduit alors que  $f(a) = f(b) = 0_E$  et  $f(c) = a$  puis que  $b$  appartient au noyau de  $f$ , et  $a$  appartient à la fois au noyau et à l'image de  $f$ . Puisque  $(a, b, c)$  est une base de  $E$ ,  $(a, b)$  est une famille libre de  $\text{Ker } f$ . Puisque  $\dim \text{Ker } f = 2$ ,  $(a, b)$  forme une base de  $\text{Ker } f$ . On en déduit que  $c \notin \text{Ker } f$ .

- **Synthèse.** Soit  $c \in E \setminus \text{Ker } f$ . On pose  $a = f(c)$ . Puisque  $a \in \text{Im } f$ ,  $a \in \text{Ker } f$ .

Par hypothèse  $a \neq 0$ , donc  $(a)$  forme une famille libre, qu'on complète en une base  $(a, b)$  de  $\text{Ker } f$  (qui est de dimension 2).

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0_E$ . On a alors :

$$\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b) + \lambda_3 f(c) = 0_E,$$

i.e.  $\lambda_3 a = 0_E$ . Puisque  $a \neq 0_E$ ,  $\lambda_3 = 0$  et ainsi  $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0_E$ . Puisque  $(a, b)$  est libre,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . On en déduit que la famille  $\mathcal{B} = (a, b, c)$  est libre ; elle forme donc une base de  $E$ .

Puisque  $f(a) = f(b) = 0_E$  et  $f(c) = a$ , la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Corrigé de l'exercice 9.** [\[Énoncé\]](#)

**Corrigé de l'exercice 10.** [\[Énoncé\]](#)

1. Remarquons que, pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,  $f(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1 - X) = \lambda P(1 - X) + Q(1 - X) = \lambda f(P) + f(Q).$$

L'application  $f$  est donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

2. L'idée était ici de remarquer que la matrice  $A$  est celle qui représente l'endomorphisme  $f$

dans la base canonique de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  (qu'on notera  $\mathcal{B}_c$ ) :

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(X^{j-1}) &= (1 - X)^{j-1} \text{ d'après la formule du binôme de Newton} \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \binom{j-1}{k} X^k \\ &= \sum_{i=1}^j (-1)^{i-1} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^j a_{i,j} X^{i-1}. \end{aligned}$$

Puisque  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$ ,  $A^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f^2)$ . Or  $f^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$  puisque, pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,  $f^2(P) = f(P)(1 - X) = P(1 - (1 - X)) = P(X)$ .

On en déduit que  $A^2 = I_n$ , et ainsi que  $A$  est inversible, d'inverse la matrice  $A$  elle-même.

**Corrigé de l'exercice 11.** [\[Énoncé\]](#)

1. La matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème du rang, on a (puisque  $\mathbb{R}^3$  est de dimension finie) :

$$\dim \text{Ker}(f - \text{Id}) = 3 - \text{rg}(f - \text{Id}).$$

Or  $\text{rg}(A - I_3) = 2$ , donc  $\dim \text{Ker}(f - \text{Id}) = 1$ .

En appliquant le même raisonnement, on trouve que  $\dim(f - 3\text{Id}) = 1$ .

Enfin, toujours par le même raisonnement, on trouve que la matrice de  $(f - 3\text{Id})^2$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a immédiatement  $\text{rg}(A - 3I_3)^2 = 1$  donc  $\dim \text{Ker}(f - 3\text{Id})^2 = 2$  par le théorème du rang.

2. Montrons le résultat par analyse-synthèse.

**Analyse.** Soit  $x \in \mathbb{R}^3$ . Supposons qu'il existe un unique couple  $(y, z) \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \times \text{Ker}(f - 3\text{Id})^2$  tel que  $x = y + z$ .

Puisque  $(f - 3\text{Id})^2 = f^2 - 6f + 9\text{Id}$  et  $f(y) = y$ ,  $(f - 3\text{Id})^2(x) = f^2(y) - 6f(y) + 9y = 4y$ .

La dernière égalité assure l'unicité de  $y$  (et donc celle de  $z$  puisque  $z = x - y$ ).

**Synthèse.** Soit  $x \in \mathbb{R}^3$ . Posons :

$$y = \frac{1}{4}(f - 3\text{Id})^2(x) \text{ et } z = x - y.$$

Vérifions que  $y \in \text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $z \in \text{Ker}(f - 3\text{Id})^2$ .

Un calcul montre que  $(A - I_3) \times (A - 3I_3)^2 = 0_3$ . Ainsi  $\text{Im}(f - 3\text{Id})^2 \subset \text{Ker}(f - \text{Id})$ , ce qui implique que  $y \in \text{Ker}(f - \text{Id})$ .

Remarquons que :

$$(f - 3\text{Id})^2(z) = (f - 3\text{Id})^2(x) - \frac{1}{4}(f - 3\text{Id})^4(x).$$

Or un second calcul montre que  $(A - 3I_3)^4 = 4(A - 3I_3)^2$ . On en déduit donc que  $z \in \text{Ker}(f - 3\text{Id})^2$ , ce qui conclut le raisonnement.

**Corrigé de l'exercice 12.** [\[Énoncé\]](#)

1. Soit  $y \in \text{Im}(u^2 + \text{Id})$ . Il existe  $x \in \mathbb{R}^3$  tel que  $y = (u^2 + \text{Id})(x) = u^2(x) + x$ .

Ainsi  $u(y) = u^3(x) + u(x) = 0$ , ce qui signifie que  $y \in \text{Ker } u$ .

On en déduit que  $\text{Im}(u^2 + \text{Id}) \subset \text{Ker } u$ .

2. Raisonnons par analyse-synthèse.

**Analyse.** Soit  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Supposons qu'il existe un unique couple  $(y, z) \in \text{Ker } u \times \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$  tel que  $x = y + z$ .

On a alors  $(u^2 + \text{Id})(x) = (u^2 + \text{Id})(y) = y$ , ce qui assure l'unicité de  $y$  (et donc celle de  $z$  puisque  $z = x - y$ ).

**Synthèse.** Soit  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Posons  $y = (u^2 + \text{Id})(x)$  et  $z = x - y$ . Montrons que  $y \in \text{Ker } u$  et  $z \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$ .

Puisque  $y \in \text{Im}(u^2 + \text{Id})$ ,  $y \in \text{Ker } u$  d'après la première question. De plus :

$$(u^2 + \text{Id})(z) = u^2(z) + z = u^2(x) - u^2(y) + x - y = (u^2 + \text{Id})(x) - y = 0.$$

On en déduit que  $z \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$ , ce qui conclut l'analyse-synthèse :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \exists!(y, z) \in \text{Ker } u \times \text{Ker}(u^2 + \text{Id}), x = y + z.$$

3. Puisque l'endomorphisme  $u$  est non nul,  $\dim \text{Ker } u < 3$ . On en déduit que  $\text{rg}(u^2 + \text{Id}) < 3$  et, par le théorème du rang,  $\dim \text{Ker}(u^2 + \text{Id}) > 0$ , i.e.  $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}) \neq \{0\}$ .

**Corrigé de l'exercice 13.** [\[Énoncé\]](#)

Puisque  $f$  et  $\text{Id}_E$  commutent, on a :

$$(f - \text{Id}_E) \circ (f^2 + f + \text{Id}_E) = f^3 - \text{Id}_E = -\text{Id}_E.$$

On en déduit que  $f - \text{Id}_E$  est un automorphisme de  $E$ , et de réciproque  $-f^2 - f - \text{Id}_E$ .

De manière analogue, on a :

$$(f + \text{Id}_E) \circ (f^2 - f + \text{Id}_E) = f^3 + \text{Id}_E = \text{Id}_E.$$

On en déduit que  $f + \text{Id}_E$  est un automorphisme de  $E$ , et de réciproque  $f^2 - f + \text{Id}_E$ .

**Corrigé de l'exercice 14.** [\[Énoncé\]](#)

**Corrigé de l'exercice 15.** [\[Énoncé\]](#)

1. a. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ , i.e. :

$$\forall t \in \mathbb{R}, ae^t + be^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + ce^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

En multipliant par  $e^{-t}$ , on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a + be^{-\frac{3t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + ce^{-\frac{3t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

En passant à la limite lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , on trouve  $a = 0$ . En évaluant en  $t = 0$ , on obtient  $c = 0$ . Il vient immédiatement que  $b = 0$ .

On en déduit que  $\mathcal{B}$  est libre et donc une base de  $G$ .

b. Après calculs, on trouve que  $D(f_1) = f_1 \in G$  et :

$$\bullet D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3 \in G, \quad \bullet D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3 \in G.$$

Pour tout  $f \in G$ , il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f = af_1 + bf_2 + cf_3$ , et ainsi par linéarité de l'application  $D$ , on a :

$$D(f) = aD(f_1) + bD(f_2) + cD(f_3) \in G.$$

On a donc bien montré que pour tout  $f \in G$ ,  $D(f) \in G$ .



c. On trouve immédiatement que  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

d. On obtient  $M^3 = I_3$ , ce qui signifie que  $M$  est inversible, d'inverse :

$$M^{-1} = M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

e. La matrice de l'endomorphisme  $d$  étant inversible,  $d$  est un automorphisme de  $G$  et  $d^{-1} = d^2$ . On en déduit que  $d^{-1}$  est l'opérateur de dérivation seconde :

$$\begin{array}{ccc} d^{-1} : & G & \rightarrow G \\ & f & \mapsto f'' \end{array}.$$

2. a. Si  $f$  est une solution de  $(*)$  alors  $f$  est nécessairement trois fois dérivable pour vérifier  $f^{(3)} = f$ . Un raisonnement par récurrence (à faire !) montrerait que  $f$  est  $\mathcal{C}^{3n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $\mathcal{C}^\infty$ .

b. Puisque la dérivée de toute fonction  $\mathcal{C}^\infty$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ , l'opérateur  $D$  est un endomorphisme de  $E$  (la linéarité est déjà connue).

Par opérations sur les endomorphismes,  $T = D^3 - \text{Id}_E$  est un endomorphisme de  $E$ .

c. Une fonction  $y$  de  $E$  est solution de  $(*)$  si, et seulement si,  $y^{(3)} - y = 0$ , i.e. si, et seulement si,  $D^3 - \text{Id}_E(y) = 0$ , ce qui revient à  $T(y) = 0$ .

On en déduit que l'ensemble des solutions de  $(*)$  est  $\text{Ker } T$ .

d. On a démontré à la question 1.d que  $M^3 = I_3$ , i.e pour tout  $f \in G$ ,  $f^{(3)} = f$ .

On obtient donc bien que  $G \subset \text{Ker } T$ .

e. (i) Soit  $f$  une solution de  $(*)$ . La fonction  $g$  est bien dérivable puisque  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et :

$$g' = f' + f'' + f^{(3)} = f' + f'' + f = g.$$

(ii) La résolution de l'équation différentielle  $g' = g$  montre qu'il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = Ke^x$ .

Soit  $K \in \mathbb{R}$ . La résolution de l'équation différentielle  $f'' + f' + f = Ke^x$  nous donne une expression de  $f$  :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{K}{3}e^x + \lambda e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

On en déduit que  $f = \frac{K}{3}f_1 + \lambda f_2 + \mu f_3 \in G$ . On a donc bien prouvé l'inclusion réciproque  $\text{Ker } T \subset G$ .

f. Puisque  $\text{Ker } T = G$ , l'ensemble des solutions de  $(*)$  est le sous-espace vectoriel  $G = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$  de  $E$ .