Exercice 1

1.

```python
def somme(L,i,j):
    s = 0
    for k in range(i,j):
        s += L[k]
    return L
```

2.

```python
def sous_liste_long(L,k):
    s_max = somme(L,0,k)
    for i in range(0,len(L)-k):
        s = somme(L,i,i+k)
        if s > s_max:
            s_max = s
    return s_max
```

Exercice 2

1. On reconnait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. L'équation caractéristique associée à (H) est $4r^2+4r+1=0$ qui admet une solution double : $r=-\dfrac{1}{2}$. L'ensemble des solutions de (H) est donc :

$$\boxed{F=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & (\lambda t+\mu)e^{-\frac{t}{2}}\end{array},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

2. Posons $f_1 : t\mapsto te^{-\frac{t}{2}}$ et $f_2 : t\mapsto e^{-\frac{t}{2}}$. On trouve que :

$$F=\left\{\lambda f_1+\mu f_2,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}(f_1,f_2).$$

Puisque les fonctions f_1 et f_2 appartiennent au $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions dérivables (continues ou $\mathcal{C}^\infty$ convenait aussi) sur $\mathbb{R}$, F est un sous-espace vectoriel de E donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarquons que la famille (f_1,f_2) est génératrice de F. Étudions sa liberté. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_1+\mu f_2=0$. Ainsi : $\forall t\in\mathbb{R},\ (\lambda t+\mu)e^{-\frac{t}{2}}=0$. En particulier, en évaluant en $t=0$ et $t=1$, on trouve que $\mu=0$ et $\lambda+\mu=0$ donc que $\lambda=\mu=0$. La famille (f_1,f_2) est donc une base de <u>F qui est donc de dimension 2</u>.

3. Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E) : \forall t\in\mathbb{R},\ 4y''(t)+4y'(t)+y(t)=e^{-\frac{t}{2}}.$$

sous la forme $g : t\mapsto (at^2+bt+c)e^{-\frac{t}{2}}$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Or :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)=at^2e^{-\frac{t}{2}}+(bt+c)e^{-\frac{t}{2}}.$$

Puisque toutes les fonctions de la forme $t\mapsto(bt+c)e^{-\frac{t}{2}}$ sont solutions de l'équation homogène associée, le principe de superposition assure qu'il suffit de chercher une solution de la forme $h : t\mapsto at^2e^{-\frac{t}{2}}$.

La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ h'(t)=a\left(-\frac{1}{2}t^2+2t\right)e^{-\frac{t}{2}}$$
$$h''(t)=a\left[\left(\frac{1}{4}t^2-t\right)e^{-\frac{t}{2}}+(-t+2)\,e^{-\frac{t}{2}}\right]=\frac{a}{4}\left(t^2-8t+8\right)e^{-\frac{t}{2}}.$$

La fonction h est solution de (E) si, et seulement :

$$\begin{aligned}&\forall t\in\mathbb{R},\ 4h''(t)+4h'(t)+h(t)=e^{-\frac{t}{2}}\\ \Leftrightarrow\ &\forall t\in\mathbb{R},\ a\left(t^2-8t+8\right)e^{-\frac{t}{2}}+a\left(-2t^2+8t\right)e^{-\frac{t}{2}}+at^2e^{-\frac{t}{2}}=e^{-\frac{t}{2}}\\ \Leftrightarrow\ &\forall t\in\mathbb{R},\ 8a=1.\end{aligned}$$

On trouve ainsi que la fonction $t\mapsto\dfrac{t^2}{8}e^{-\frac{t}{2}}$ est une solution particulière de (E), ce qui permet de déterminer l'ensemble des solutions de (E) :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \left(\dfrac{t^2}{8}+\lambda t+\mu\right)e^{-\frac{t}{2}}\end{array},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Exercice 3

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et soient A et B deux carrés magiques d'ordre 3, i.e. $(A,B)\in F^2$.

Les sommes de coefficients de chaque ligne, colonne et diagonale de λA sont toutes égales λs_A. Ainsi $\lambda A\in F$. Les sommes de coefficients de chaque ligne, colonne et diagonale de $A+B$ sont toutes égales s_A+s_B. Ainsi $A+B\in F$.

<u>On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.</u>

2. Remarquons que $F_0\subset F$. En reprenant la démonstration de la question précédente avec $(A,B)\in F_0^2$, on a $s_A=s_B=0$. Ainsi $\lambda s_A=0$ et $s_A+s_B=0$, i.e. $\lambda A\in F_0$ et $A+B\in F_0$. On en déduit que <u>F_0 est un sous-espace vectoriel de F</u>.

3. Soit $M \in F$. La matrice $\frac{s_M}{3}J$ appartient à F et la somme des coefficients de chacune de ses lignes, colonnes et diagonales est égale à s. Ainsi, a somme des coefficients de chacune des lignes, colonnes et diagonales de la matrice $M_0 = M - \frac{s_M}{3}J$ est égale à 0.

   On en déduit que $M = M_0 + \frac{s_M}{3}J$ où $M_0 \in F_0$ et $\frac{s_M}{3}J \in G$.

   Montrons que cette décomposition est unique.

   Soient $(A, B) \in F_0 \times G$ tel que $M = A+B$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda J$. Ainsi $M_0 + \frac{s_M}{3}J = A + \lambda J$, i.e. $M_0 - A = (\lambda - \frac{s_M}{3})J$. Puisque la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice $M_0 - A$ est égale à 0 et que celle de chaque ligne de $(\lambda - \frac{s_M}{3})J$ est $3\lambda - s_M$, on en déduit que $\lambda = \frac{s_M}{3}$, i.e. $B = \frac{s_M}{3}J$. Il vient alors immédiatement que $A = M_0$, ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

   On en déduit que toute matrice de F s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de F_0 et d'une matrice de G.

   On aurait pu raisonner par analyse-synthèse pour trouver les candidats de F_0 et G s'ils ne sautaient pas aux yeux.

4. a. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de F_0.

   En considérant la somme des coefficients des deux premières lignes, on trouve $e = -(a+b)$ et $f = -(c+d)$. En considérant la somme des coefficients des deux premières colonnes, on trouve $g = -(a+c)$ et $h = -(b+d)$. En considérant la somme des coefficients de la diagonale (au sens matriciel), on trouve $i = -(a+d)$. Ainsi toute matrice $N \in F_0$ peut s'écrire sous la forme :

   $$\boxed{\begin{pmatrix} a & b & -(a+b) \\ c & d & -(c+d) \\ -(a+c) & -(b+d) & -(a+d) \end{pmatrix}}$$

   En considérant la dernière ligne et la seconde diagonale, on trouve :

   $$2a + b + c + 2d = 0 \text{ et } 2a + b + c + d = 0.$$

   On en déduit que $\boxed{d = 0 \text{ et } c = -2a - b.}$

   b. D'après la question précédente, on a :

   $$F_0 \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & b & -(a+b) \\ -2a-b & 0 & 2a+b \\ a+b & -b & -a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(U, V)$$

   où :

   $$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On vérifie facilement que $U \in F_0$ et $V \in F_0$. Ainsi $\text{Vect}(U, V) \subset F_0$ et donc $\text{Vect}(U, V) \subset F_0$. Les matrices U et V n'étant colinéaires (cela peut se vérifier en considérant le coefficient de la première ligne, première colonne de U et V), ainsi la famille (U, V) est libre donc une base de F_0, qui est donc de dimension 2.

5. D'après la question 3, $F \subset \text{Vect}(U, V, J)$. En effet, soit $M \in F$. Il existe $(N, B) \in F_0 \times G$ tel que $M = N + B$. D'après la question 4, il existe $(\lambda, a, b) \in \mathbb{R}^3$, $N = aU + bV$ et $B = \lambda J$. Ainsi, $M = aU + bV + \lambda J \in \text{Vect}(U, V, J)$.

   Les matrices U, V et J appartiennent à F donc $\text{Vect}(U, V, J) \subset F$ et $F = \text{Vect}(U, V, J)$.

   Puisque (U, V) est libre et $J \notin F_0 = \text{Vect}(U, V)$, la famille (U, V, J) est encore libre ; c'est donc une base de F.

   On en déduit que F est un espace vectoriel de dimension 3.

Exercice 4

1. a. (i) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$,

   $$\boxed{\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t} \quad \text{car } t \neq 1.}$$

   (ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\left(t \mapsto t^{p-1}\right)$ est continue sur $[0, x]$, tout comme les fonctions $\left(t \mapsto \frac{1}{1-t}\right)$ et $\left(t \mapsto \frac{t^n}{1-t}\right)$. Par intégration sur $[0, x]$ et linéarité de l'intégrale, on trouve

   $$\sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t,$$

   et ainsi que :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.}$$

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0,x]$, $0 < 1-x \leqslant 1-t$ donc $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1-t} \leqslant \dfrac{t^n}{1-x}$.
Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)(1-x)}.}$$

(iv) Le théorème d'encadrement assure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Par passage à la limite de l'égalité obtenue à la question 1.a.(ii), on obtient que la série $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}^*} \dfrac{x^p}{p}$ converge et

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).}$$

b. En appliquant la formule du triangle de Pascal, on trouve (en reconnaissant une somme télescopique) que, pour tout $n \geqslant m$:

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n} \left[\binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}\right] = \binom{n+1}{m+1} - \binom{m}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}.}$$

On pouvait aussi démontrer le résultat par récurrence sur $n \geqslant m$.

2. a. On commence par écrire une fonction simulant des lois géométriques ; on conclut en sommant les simulations des variables $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

```
import random as rd

def geometrique(x):
    rang = 1
    while rd.random() > x:
        rang += 1
    return rang

def simule_S(n,x):
    somme = 0
    for k in range(n):
        somme += geometrique(x)
     return somme
```

b. Puisque $X_k(\Omega) = \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, alors $\boxed{S_n(\Omega) = [\![n,+\infty[\![.}$

Par indépendance des variables $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ les variables $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.

Puisque $([S_n = j])_{j\geqslant n}$ forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour tout entier naturel $k \geqslant n+1$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{n+1} = k)\\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left([S_n = j] \cap [S_{n+1} = k]\right) \text{ (la série converge par } \sigma\text{-additivité)}\\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left([S_n = j] \cap [S_n + X_{n+1} = k]\right)\\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left([S_n = j] \cap [X_{n+1} = k-j]\right)\\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = j)\mathbb{P}(X_{n+1} = k-j) \text{ par indépendance de } S_n \text{ et } X_{n+1}\\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}(S_n = j)\mathbb{P}(X_{n+1} = k-j) \text{ car } \forall j \geqslant k,\ [X_{n+1} = k-j] = \emptyset\\
&= \boxed{\sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}(S_n = j)\mathbb{P}(X_{n+1} = k-j),}
\end{aligned}$$

c. • Initialisation. Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(S_1 = k) &= \mathbb{P}(X_1 = k)\\
&= x(1-x)^{k-1}\\
&= \binom{k-1}{0} x^n (1-x)^{k-n}\\
&= \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}.
\end{aligned}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que :

$$\forall k \geqslant n,\ \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}.$$

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\forall k \geqslant n+1,\ \mathbb{P}(S_{n+1}=k) &= \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}\left(S_n=j\right) \mathbb{P}\left(X_{n+1}=k-j\right)\\ &= \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^n(1-x)^{j-n} x(1-x)^{k-j-1}\\ &= x^{n+1}(1-x)^{k-n-1} \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1}\\ &= x^{n+1}(1-x)^{k-(n+1)} \sum_{i=n-1}^{k-2} \binom{i}{n-1}\\ &= \binom{k-1}{n} x^{n+1}(1-x)^{k-(n+1)} \quad \text{(d'après 1.b).}\end{aligned}$$

La propriété est initialisée et héréditaire. Ainsi

$$\boxed{\forall k \geqslant n,\ \mathbb{P}(S_n=k) = \binom{k-1}{n-1} x^n(1-x)^{k-n}.}$$

d. Puisque $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty [\![$, on a obtient immédiatement que :

$$1 = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^n(1-x)^{k-n}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}.}$$

3. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $q^k > 0$ et $-\ln p > 0$ (car $p \in]0,1[$) donc $u_k > 0$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien à valeurs positives.

b. D'après la question 1.a.(iv), la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{q^k}{k}$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = -\ln(1-q) = -\ln p.$$

On en déduit que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} u_k$ converge et : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1.}$

c. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En reconnaissant une somme partielle de série géométrique de raison q, convergente car $|q| < 1$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{N} |k\mathbb{P}(X=k)| = \frac{-1}{\ln p} \sum_{k=1}^{N} q^k = \frac{-q}{\ln p} \sum_{i=0}^{N-1} q^i \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-q}{(1-q)\ln p} = \frac{-q}{p\ln p}$$

Puisque la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument, <u>X admet une espérance</u> et

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{-q}{p\ln p}.}$$

d. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En reconnaissant une somme partielle de série géométrique dérivée de raison q, convergente car $|q| < 1$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{N} |k^2\mathbb{P}(X=k)| = \frac{-1}{\ln p} \sum_{k=1}^{N} kq^k = \frac{-q}{\ln p} \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-q}{(1-q)^2\ln p} = \frac{-q}{p^2\ln p}$$

Puisque la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument, X^2 admet une espérance d'après le théorème du transfert, égale à :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{-q}{p^2\ln p}.$$

La formule de König-Hyugens assure que <u>X admet une variance</u>, égale à :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2\\ &= \frac{-q}{p^2\ln p} - \frac{q^2}{(p\ln p)^2}\\ &= \boxed{\frac{-q(q+\ln p)}{(p\ln p)^2}.}\end{aligned}$$

4. a. On obtient immédiatement que :

$$\boxed{Y(\Omega) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [\![0, k]\!] = \mathbb{N}.}$$

Puisque $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements, on trouve, en vertu de la formule des probabilités totales (la série ci-dessous converge par σ-additivité) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=0)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-q^k}{k\ln p}\binom{k}{0}p^0q^k\\
&= \frac{-1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(q^2\right)^k}{k}\\
&= \frac{\ln\left(1-q^2\right)}{\ln p} \quad \text{d'après la question 1.a.(iv) et puisque } q^2\in[0,1[\\
&= \frac{\ln((1-q)(1+q))}{\ln p}\\
&= \boxed{1+\frac{\ln(1+q)}{\ln p}.}
\end{aligned}$$

b. Soit $(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. Si $n>k$, $\binom{k}{n}=\binom{k-1}{n-1}=0$; l'égalité est alors triviale.

Sinon, si $n\leqslant k$, on a :

$$\frac{\binom{k}{n}}{k}=\frac{k!}{kn!(k-n)!}=\frac{(k-1)!}{n(n-1)!((k-1)-(n-1))!}=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ \frac{\binom{k}{n}}{k}=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}.}$$

Fixons $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements, on trouve, en vertu de la formule des probabilités totales (la série ci-dessous converge par σ-additivité) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=n)\\
&= \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=n) \quad (\text{car } \forall k<n,\ \mathbb{P}_{[X=k]}(Y=n)=0)\\
&= \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{-q^k}{n\ln p}\binom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n}\\
&= -\frac{p^nq^n}{n\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}q^{2k-2n}\\
&= \boxed{-\frac{p^nq^n}{n\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}\left(q^2\right)^{k-n}}\\
&= -\frac{p^nq^n}{n\ln p}\frac{1}{\left(1-q^2\right)^n} \quad \text{d'après la question 1.c.(iv)}\\
&= \boxed{-\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln p}.}
\end{aligned}$$

* *
*