

## Questions de cours

1. Quelle est la dimension de  $\mathbb{R}_{n-2}[X]$  pour un entier naturel  $n \geq 2$  ?
2. Donner la caractérisation d'une famille libre/génératrice/d'une base d'un espace vectoriel par son rang.
3. Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
4. Énoncer le théorème du transfert pour les variables aléatoires discrètes.

## Exercice 1 Oral Agro 2024

1. Écrire une fonction **somme** qui prend en argument une liste **L** de nombres et deux indices **i** < **j** et qui renvoie la somme des éléments de l'indice **i** inclus à l'indice **j** exclu.
2. Écrire une fonction **sous\_liste\_long** qui prend en argument une liste **L** de nombres et un entier **k** et qui renvoie la plus grande somme des éléments de sous-listes de **L** (d'éléments consécutifs) de longueur **k**.

## Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble  $F$  des solutions de l'équation différentielle  $(H) : \forall t \in \mathbb{R}, 4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$ .
2. Montrer que  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.
3. Déterminer toutes les fonctions  $f$  vérifiant :  $\forall t \in \mathbb{R}, 4f''(t) + 4f'(t) + f(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ .

*On cherchera une solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus de la forme  $g : t \mapsto P(t)e^{-\frac{t}{2}}$  où  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.*

## Exercice 3

On appelle carré magique d'ordre 3 toute matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  dont les sommes de chaque ligne, chaque colonne et des deux diagonales sont égales. Pour une telle matrice  $M$ , on notera  $s_M$  cette valeur commune.

1. Justifier que l'ensemble  $F$  des carrés magiques d'ordre 3 est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
2. Justifier que l'ensemble  $F_0$  des carrés magiques d'ordre 3 dont la somme de chaque ligne, colonne et diagonale est nulle, est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

3. On note  $G$  le sous-espace vectoriel de  $F$  engendré par la matrice  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que toute matrice  $M$  de  $F$  s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de  $F_0$  et d'une matrice de  $G$ . *On pourra déterminer ces deux matrices par un raisonnement direct ou bien par analyse-synthèse.*

4. a. Montrer que toute matrice  $N \in F_0$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & -(a+b) \\ c & d & -(c+d) \\ -(a+c) & -(b+d) & -(a+d) \end{pmatrix}.$$

En déduire que  $d = 0$  et  $c = -2a - b$ .

- b. En déduire une base et la dimension de  $F_0$ .

5. Déduire des questions 3 et 4.b une base de  $F$  et vérifier que  $\dim F = 3$ .

## Exercice 4

1. a. Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $[0, 1[$ .
  - (i) Pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, x]$ , donner une expression ramassée de la somme  $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$ .
  - (ii) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ .
  - (iii) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$ .
  - (iv) En déduire que  $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$ .
- b. Soit  $m$  un entier naturel. Établir que :  $\forall n \geq m, \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ .
2. Soit  $x \in [0, 1[$ . On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre  $x$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .
  - a. Écrire en Python une fonction prenant en argument un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et un réel  $x$  et simulant  $S_n$ . *Il est conseillé d'écrire une fonction auxiliaire qui sera utilisée dans la fonction principale répondant à la question.*
  - b. Déterminer  $S_n(\Omega)$ , puis établir que :
 
$$\forall k \geq n+1, \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}(S_n = j) \mathbb{P}(X_{n+1} = k-j).$$
  - c. En déduire par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  que :
 
$$\forall k \geq n, \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}.$$
  - d. En déduire que :  $\forall x \in ]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$ .
3. Soient  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1-p$ . On considère la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  définie par :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = -\frac{q^k}{k \ln p}$ .
  - a. Vérifier que la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est à valeurs positives.
  - b. Montrer en utilisant un résultat de la partie 1 que  $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$ .
  - c. On considère une variable aléatoire  $X$  dont la loi de probabilité est donnée par :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = u_k$ . Montrer que  $X$  admet une espérance qu'on déterminera.
  - d. Montrer que  $X$  admet une variance égale à  $\mathbb{V}(X) = \frac{-q(q + \ln p)}{(p \ln p)^2}$ .
4. On considère une variable aléatoire  $Y$  dont la loi, conditionnellement à l'événement  $[X = k]$ , est la loi binomiale de paramètres  $k$  et  $p$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .
  - a. Déterminer  $Y(\Omega)$  puis montrer que  $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln p}$ .
  - b. Après avoir montré que pour tout couple  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  on a  $\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$ , établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = n) = -\frac{p^n q^n}{n \ln p} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n} = -\frac{q^n}{n(1+q)^n \ln p}.$$

\*   \*  
\*