

Semaines 9 et 10
du 24 novembre au 5 décembre 2025

Chapitre : applications linéaires

• **Mots-clé du cours** :

- applications linéaires : définition, caractérisation, premières propriétés, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme,
- opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque d'un isomorphisme (la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ est hors-programme, mais peut être étudiée au détour d'un exercice)
- notion de noyau et d'image : définition, caractérisation de l'injectivité (resp. la surjectivité) d'une application linéaire par son noyau (resp. image),
- propriétés en dimension finie : caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base de l'espace de départ, notion de rang d'une application linéaire, théorème du rang, caractérisation du caractère injectif/surjectif/bijectif d'une application linéaire par son rang puis par l'image d'une base.
- Matrice d'une application linéaire : définition, matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée d'applications linéaires, de la réciproque d'un isomorphisme, noyau et image d'une matrice, propriétés du rang d'une matrice (majoration, invariance, transposition, inversibilité), théorème du rang version matricielle.

• **Résultats à connaître** :

- caractérisation d'une application linéaire (par l'image de combinaisons linéaires)
- opérations sur les applications linéaires
- structure du noyau et de l'image d'une application linéaire (*la démonstration est exigible*),
- caractérisation d'une application linéaire injective par son noyau,
- caractérisation d'une application linéaire surjective par son image,
- caractérisation d'une application linéaire (en dimension finie) par l'image d'une base de l'espace de départ,
- le rang d'une application linéaire ne dépend pas de la base choisie,
- théorème du rang pour les applications linéaires
- caractérisation du caractère injectif/surjectif/bijectif d'une application linéaire (en dimension finie) par son rang puis par l'image d'une base (*la démonstration est exigible*).
- matrice de la composée d'applications linéaires
- caractérisation matricielle de l'égalité vectorielle $u(x) = y$
- propriété des matrices d'un isomorphisme (*la démonstration est exigible*)
- théorème du rang pour les matrices
- caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée par son rang (*la démonstration est exigible*)