

Exercice 1

```
def change_signe(L):
    s = 0
    for k in range(len(L)-1):
        if L[k] * L[k+1] < 0:
            s += 1
    return s
```

Exercice 2

1. On trouve immédiatement que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En notant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, F_k l'événement "on obtient face au k -ème lancer", on peut écrire :

$$[X = n] = \bigcup_{k=1}^{n+1} (F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k} \cap F_{k+1} \cap \dots \cap F_{n+1} \cap \overline{F_{n+2}}).$$

En effet, réaliser l'événement $[X = n]$ revient à obtenir un pile et n faces lors de l'un des $n+1$ premiers lancers et un pile au dernier lancer.

La réunion étant disjointe et par indépendance des lancers, on trouve que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k} \cap F_{k+1} \cap \dots \cap F_{n+1} \cap \overline{F_{n+2}}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(F_1) \dots \mathbb{P}(F_{k-1}) \mathbb{P}(\overline{F_k}) \mathbb{P}(F_{k+1}) \dots \mathbb{P}(F_{n+1}) \mathbb{P}(\overline{F_{n+2}}) = \sum_{k=1}^{n+1} p^2 q^n. \end{aligned}$$

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = (n+1)p^2 q^n$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |n \mathbb{P}(X = n)| &= \sum_{n=0}^N n(n+1)p^2 q^n \\ &= p^2 \left[\sum_{n=0}^N n(n-1)q^n + \sum_{n=0}^N 2nq^n \right] \\ &= p^2 \left[q^2 \sum_{n=2}^N n(n-1)q^{n-2} + 2q \sum_{n=1}^N nq^{n-1} \right] \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} p^2 \left[q^2 \frac{2}{(1-q)^3} + 2q \frac{1}{(1-q)^2} \right] = \frac{2q^2}{p} + 2q = \frac{2q^2 + 2qp}{p} = \frac{2q}{p}, \end{aligned}$$

en reconnaissant des sommes partielles de séries géométriques de raison $q \in]-1; 1[$ (donc convergentes). On en déduit que X admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(X) = \frac{2q}{p}$.

3. a. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Remarquons qu'il est impossible que tirer un numéro de boule strictement plus grand que le nombre de faces obtenu. Ainsi $\mathbb{P}_{[X=n]}(Y = k) = 0$ si $k > n$.

Dans le cas où $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il y a équiprobabilité des numéros de boules donc $\mathbb{P}_{[X=n]}(Y = k) = \frac{1}{n+1}$.

- b. Remarquons que $Y(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \llbracket 0, n \rrbracket = \mathbb{N}$. Puisque $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure l'égalité ci-dessous (la série ci-dessous par σ -additivité) :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}_{[X=n]}(Y = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}(X = n) \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} p^2 q^n \\ &= p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} q^{k+j} \quad \text{en posant } j = n - k \\ &= p^2 q^k \sum_{j=0}^{+\infty} q^j \\ &= \boxed{pq^k}. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y + 1 = k) = \mathbb{P}(Y = k - 1) = pq^{k-1}$.

La variable aléatoire $Y + 1$ suit donc la géométrie de paramètre p .

- c. Puisque $Y + 1$ admet une espérance et une variance, la variable $Y = (Y + 1) - 1$ admet une espérance par linéarité et une variance (par invariance par translation) et :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y + 1) - 1 = \frac{1}{p} - 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(Y + 1) = \frac{q}{p^2}.$$

- d. (i) On trouve que : $Z(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \llbracket 0, n \rrbracket = \mathbb{N}.$

En utilisant toujours le système complet d'événements $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$, la formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Z = j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}_{[X=n]}(Z = j) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}_{[X=n]}(X - Y = j) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}_{[X=n]}(Y = n - j). \end{aligned}$$

- (ii) D'après ce qui précède, on trouve que, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}_{[X=n]}(Y = n - j) \\ &= \sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}_{[X=n]}(Y = n - j) \text{ (si } n < j, \mathbb{P}_{[X=n]}(Y = n - j) = 0) \\ &= \sum_{n=j}^{+\infty} p^2 q^n \\ &= \mathbb{P}(Y = j) \text{ d'après les calculs de la question 3.b.} \end{aligned}$$

On en déduit que les variables Y et Z suivent la même loi.

- (iii) Pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = k] \cap [Z = j]) &= \mathbb{P}([Y = k] \cap [X - Y = j]) \\ &= \mathbb{P}([Y = k] \cap [X = k + j]) \\ &= \mathbb{P}(X = k + j) \mathbb{P}_{[X=k+j]}(Y = k) \\ &= p^2 q^{k+j} \\ &= pq^k \times pq^j \\ &= \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(Z = j). \end{aligned}$$

Les variables aléatoires Y et Z sont donc indépendantes.

Exercice 3

1. Puisque $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $BA \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
2. Puisque f et g sont deux applications linéaires entre deux espaces de dimensions (finies) différentes, ce ne sont pas des isomorphismes.
3. Remarquons que la matrice AB est la matrice de l'endomorphisme $f \circ g$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker } f \circ g \Leftrightarrow AB \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = z = 0.$$

On en déduit que $\text{Ker } f \circ g = \text{Vect}(e_1)$. Puisque e_1 n'est pas le vecteur nul, il forme une base de $\text{Ker } f \circ g$. Puisque (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$,

$$\text{Im } f \circ g = \text{Vect}(f \circ g(e_1), f \circ g(e_2), f \circ g(e_3)) = \text{Vect}(0, e_2, e_3) = \text{Vect}(e_2, e_3).$$

Puisque la famille (e_2, e_3) est libre ((e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$), elle forme une base de $\text{Im } f \circ g$.

4. Puisque $f \circ g(e_2) = e_2$ et $f \circ g(e_3) = e_3$, en composant par g , on trouve que :

$$g \circ f \circ g(e_2) = e_2 \text{ et } g \circ f \circ g(e_3) = e_3.$$

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ag(e_2) + bg(e_3) = 0$. En composant par f , on trouve que $af \circ g(e_2) + bf \circ g(e_3) = 0$, c'est-à-dire : $ae_2 + be_3 = 0$. Puisque la famille (e_2, e_3) est libre, $a = b = 0$. On trouve donc bien que la famille $(g(e_2), g(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Puisque $g \circ f(g(e_2)) = e_2$ et $g \circ f(g(e_3)) = e_3$, la matrice de $g \circ f$ dans la base $(g(e_2), g(e_3))$ est la matrice I_2 . On en déduit que $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et ainsi que la matrice de $g \circ f$ dans la base canonique est l'identité, i.e. :

$$BA = I_2.$$

7. Soit $x \in \text{Ker } f$. On a alors $f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $g(f(x)) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Or $g(f(x)) = x$ d'après la question précédente donc $x = 0_{\mathbb{R}^3}$. L'application f est donc injective.

Soit $y \in \mathbb{R}^2$. D'après la question précédente, $g(f(y)) = y$ donc y admet un antécédent par l'application g . L'application g est donc surjective.

* *
* *