Exercice 1 (Agro A 2010)

1. a. Déterminer les valeurs propres de $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

   b. Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

   c. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha > \beta > \gamma.$$

   Les coefficients de la dernière ligne de la matrice P seront choisis égaux à 1.

   d. Déterminer P^{-1}.

   e. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

   f. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n.

2. **Étude d'une suite matricielle**

   Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit la suite matricielle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B.$$

   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les endomorphismes a et b de E dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement A et B.

   a. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.
   Montrer que $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.
   On admettra la réciproque : si $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$, il existe une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

   b. On suppose désormais qu'il existe une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.
   On considère la suite matricielle $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$.

   (i) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_{n+1} en fonction de A et Y_n.
   En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de Y_n en fonction de A, n et Y_0.

   (ii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

   c. Dans toute la suite du sujet, on choisit $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (i) Soit v un vecteur de E dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont (x, y, z).
   Montrer que : $v \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a) \Leftrightarrow x - y - z = 0$.

   (ii) Justifier l'existence d'une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

   (iii) Déterminer par le calcul une matrice $L' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L' = DL' + P^{-1}BP$.
   On choisira cette matrice de manière à ce que tous les coefficients de sa première ligne soient nuls.

   (iv) En déduire une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

* *
*