Exercice 1

1.

```python
def indices(sequence,x):
    L = []
    for k in range(len(sequence)):
        if sequence[k] == x:
            L.append(k)
    return L
```

Pour les esthètes, il y avait aussi cette réponse aussi élégante que concise :

```python
def indices(sequence,x):
    return [k for k in range(len(sequence)) if sequence[k] == x]
```

2.

```python
def indices_max(L):
    maxi = L[0]
    L_max = [0]
    for k in range(1,len(L)):
        if L[k] > maxi:
            maxi = L[k]
            L_max = [k]
        elif L[k] == maxi:
            L_max.append(k)
    return L_max
```

Exercice 2

1. Il est inutile de stocker tous les numéros de boules, il suffit de ne retenir que le plus grand numéro parmi les boules encore présentes dans l'urne.

```python
import random as rd

def simuleX(n):
    boule_tiree = rd.randint(1,n)
    nb_tirages = 1
    while boule_tiree > 1:
        boule_tiree = rd.randint(1,boule_tiree-1)
        nb_tirages += 1
    return nb_tirages
```

2. On trouve immédiatement que $X_2(\Omega) = \{1;2\}$. En effet, on peut vider l'urne en un seul tirage (si on obtient la boule numérotée 1 au premier tirage) ou en deux (si on obtient la boule numérotée 2 au premier tirage, on tire nécessairement la boule numérotée 1 au second).

Par équiprobabilité des numéros de boules au premier tirage, on trouve que :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(N_1 = 1) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{2}.$$

La variable aléatoire X_2 suit la loi uniforme sur $[\![1;2]\!]$. Puisqu'elle est finie, elle admet espérance et variance. D'après le cours, on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_2) = \frac{3}{2}.}$$

On pourrait calculer $\mathbb{V}(X_2)$ en utilisant la formule de König-Huygens et le théorème du transfert (pour calculer $\mathbb{E}\left(X_2^2\right)$) mais on présente ici une idée élégante.

Remarquons que $X_2 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. En effet $(X_2-1)(\Omega) = \{0;1\}$ et $\mathbb{P}(X_2 - 1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$. En utilisant l'invariance de la variance par translation, on trouve que :

$$\boxed{\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{V}(X_2 - 1) = \frac{1}{4}.}$$

3. On trouve de la même manière que $X_3(\Omega) = [\![1;3]\!]$ et $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$. En utilisant la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3 = 3) &= \mathbb{P}\left([N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]\right) \\ &= \mathbb{P}(N_1 = 3)\mathbb{P}_{[N_1=3]}(N_2 = 2)\mathbb{P}_{[N_1=3]\cap[N_2=2]}(N_3 = 1) \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Par complémentarité, on trouve que : $\mathbb{P}(X_3 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_3 = 1) - \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{2}$.

La loi de X_3 est donc donnée par :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{6}.}$$

La variable aléatoire X_3 étant finie, elle admet une espérance, égale à :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_3) = \mathbb{P}(X_3 = 1) + 2\mathbb{P}(X_3 = 2) + 3\mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{11}{6}.}$$

4. On trouve par le même raisonnement que : $\boxed{X_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$ On trouve immédiatement par équiprobabilités des boules tirées au premier tirage que :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(N_1 = 1) = \frac{1}{n}.}$$

Remarquons que vider l'urne en n tirages revient à avoir tiré chacun des numéros, et plus précisément $[X_n = n] = [N_1 = n] \cap [N_2 = n-1] \cap \cdots \cap [N_{n-1} = 2] \cap [N_n = 1]$. En utilisant la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{n!}.}$$

5. Remarquons que N_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Soit $k \geqslant 2$. Puisque $([N_1 = i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(N_1 = i)\mathbb{P}_{N_1 = i}(X_n = k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}_{N_1 = i}(X_n = k),
\end{aligned}$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Sachant qu'on a obtenu la boule numérotée i au premier tirage, vider une urne de n boules en k tirages revient à vider une urne de $i-1$ boules en $k-1$ tirages. Ainsi : $\mathbb{P}_{N_1 = i}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1)$. On en déduit alors que :

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1).}$$

6. Les variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont finies, elles admettent donc une espérance.

Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \quad \text{(d'après 4)} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (j+1)\mathbb{P}(X_i = j) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X_i = j) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = j) \right] \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} [\mathbb{E}(X_i) + 1] \quad \text{car } X_i(\Omega) \subset [\![1, n]\!] \\
&= \boxed{1 + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).}
\end{aligned}$$

7. On en déduit que :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = (n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - (n+1) \text{ et } \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_n) - n.$$

Par soustraction, on trouve que $\mathbb{E}(X_n) = (n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - n\mathbb{E}(X_n) - 1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n+1}.}$$

8. En reconnaissant une somme télescopique, on trouve que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} [\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)] = \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_1),$$

et ainsi que :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=1}^{n-1} [\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)] = \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Puisque la variable aléatoire X_1 est constante égale à 1, $\mathbb{E}(X_1) = 1$ et :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.}$$

9. a. Soit $k \geqslant 2$. Puisque la fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{t}\right)$ est décroissante sur $[k, k+1]$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \ \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

On trouve par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \left[\frac{t}{k}\right]_k^{k+1} = \frac{1}{k}.$$

On trouve de la même manière que $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \ \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.}$$

b. En sommant l'encadrement précédent pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on trouve que :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

La relation de Chasles assure que :

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

c'est-à-dire : $\ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)$. Ainsi :

$$\frac{\ln(n+1) - \ln 2 + 1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{\ln n} = 1$ et :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1) - \ln 2 + 1}{\ln n} &= \frac{\ln\left[n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] - \ln 2 + 1}{\ln n} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 2 + 1}{\ln n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème d'encadrement de limites, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$, i.e. :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).}$$

c. On trouve immédiatement que : $\boxed{\mathbb{E}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).}$

10. Les variables aléatoires X_{n+1} et X_n sont finies donc admettent un moment d'ordre 2. D'après le théorème du transfert, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k^2 \mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k^2}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \text{ (d'après 6)} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} k^2 \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (j+1)^2 \mathbb{P}(X_i = j) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} j^2 \mathbb{P}(X_i = j) + 2\sum_{j=1}^{n} j \mathbb{P}(X_i = j) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = j)\right] \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbb{E}\left(X_i^2\right) + 2\mathbb{E}\left(X_i\right) + 1\right] \text{ car } X_i(\Omega) \subset [\![1, n]\!] \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbb{E}\left(X_i^2\right) + 2\mathbb{E}\left(X_i\right)\right]. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbb{E}\left(X_i^2\right)+2\mathbb{E}\left(X_i\right)\right]=(n+1)\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right)-(n+1)$$

puis que :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[\mathbb{E}\left(X_i^2\right)+2\mathbb{E}\left(X_i\right)\right]=n\mathbb{E}\left(X_n^2\right)-n.$$

En soustrayant ces deux égalités, on trouve :

$$(n+1)\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right)-n\mathbb{E}\left(X_n^2\right)-1=\mathbb{E}\left(X_n^2\right)+2\mathbb{E}\left(X_n\right)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right)-\mathbb{E}\left(X_n^2\right)=\frac{2\mathbb{E}\left(X_n\right)+1}{n+1}.}$$

11. D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_{n+1})&=\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right)-\mathbb{E}\left(X_{n+1}\right)^2\\&=\mathbb{E}\left(X_n^2\right)+\frac{2\mathbb{E}\left(X_n\right)+1}{n+1}-\left(\mathbb{E}(X_n)+\frac{1}{n+1}\right)^2\quad\text{d'après 6 et 9}\\&=\mathbb{E}\left(X_n^2\right)-\mathbb{E}(X_n)^2+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\\&=\mathbb{V}(X_n)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\quad\text{d'après la formule de König-Huygens.}\end{aligned}$$

En reprenant le raisonnement de la question 7, on montre que :

$$\mathbb{V}(X_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, on trouve que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\ln n}=1$.

On en déduit que : $\boxed{\mathbb{V}(X_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n).}$

Exercice 3

1. **Étude d'un exemple.**

   a. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, chaque coordonnée des vecteurs $f(x,y,z)$ et $g(x,y,z)$ s'écrit comme combinaison linéaire de x, y et z. De plus, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $g(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ donc f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.
   La justification de la linéarité est souvent mal rédigée. Il vaut mieux éviter d'utiliser le terme "antécédent", puisqu'une image peut avoir plusieurs antécédents voire même une infinité...
   Il convient d'écrire "$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$" plutôt que $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ qui n'est pas réellement une assertion logique (où serait le verbe ?).

   b. On trouve immédiatement que :

   $$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\quad\text{et } B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

   Nombreux ont été ceux qui ont rempli les matrices A et B par ligne et non par colonne...

   c. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

   $$(x,y,z)\in\operatorname{Ker}f\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-z=0\\y=0\\-x-y+z=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x=z\\y=0.\end{cases}$$

   Ainsi $\operatorname{Ker}f=\operatorname{Vect}((1,0,1))$. Puisque le vecteur $(1,0,1)$ est non nul, il forme une base de $\operatorname{Ker}f$.

   $$(x,y,z)\in\operatorname{Ker}g\Leftrightarrow x+y+z=0\Leftrightarrow z=-x-y.$$

   Ainsi $\operatorname{Ker}g=\operatorname{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$. Puisque les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $\operatorname{Ker}g$.
   Puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$,

   $$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f)&=\operatorname{Vect}((1,0,-1),(-1,2,-1),(-1,0,1))\\&=\operatorname{Vect}((1,0,-1),(-1,2,-1))\text{ car }(-1,0,1)=-(1,0,-1)\\\text{et }\operatorname{Im}(g)&=\operatorname{Vect}((1,0,1)).\end{aligned}$$

   Puisque les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(-1,2,-1)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $\operatorname{Im}f$. Puisque le vecteur $(1,0,1)$ est non nul, il forme une base de $\operatorname{Im}g$.

d. Après calculs, on trouve que $A^2 = A$ et $B^2 = B$. Puisque A^2 (resp. B^2) est la matrice de f (resp. g) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les égalités précédentes assurent que $f^2 = f$ et $g^2 = g$.

La justification du passage d'une égalité matricielle à une égalité d'endomorphisme a été systématique omise !

e. Après calculs, on trouve que $A + B = I_3$ et $AB = BA = 0_3$. Par le même argument qu'à la question précédente, il vient que

$$\boxed{f + g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \text{ et } f \circ g = g \circ f = 0.}$$

f. Notons P la matrice de la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(\mathcal{B}') &= \operatorname{rg} P \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&= 3 = \dim \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

On en déduit que <u>la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$</u>.

g. Puisque :

$$f(u) = (1, 0, -1) = u, \ f(v) = (1, -1, 0) = v \text{ et } f(w) = (0, 0, 0),$$

il vient que :

$$\boxed{D_f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Puisque $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f$, on trouve

$$\boxed{D_g = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f) = I_3 - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Cette question doit être reprise par la quasi-totalité de la classe : la méthode n'est pas comprise. Certains ont calculé la matrice de f de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$ (ou réciproquement).

h. La matrice P définie à la question 1.d convient. En effet :

- puisque $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, P est la matrice de l'identité de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$. Puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, P est inversible.
- Remarquons que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. D'après la propriété donnant la matrice d'une composée d'applications linéaires, on a :

$$\begin{aligned}
A &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \\
&= P D_f \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}).
\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = I_3.$$

On en déduit donc que $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et ainsi que :

$$\boxed{A = P D_f P^{-1}.}$$

Par un raisonnement analogue, on trouve que :

$$\boxed{B = P D_g P^{-1}.}$$

i. On aurait pu calculer le rang de A et de B, mais on sait que le rang d'une application linéaire est le rang de n'importe laquelle de ses matrices. Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} D_f = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{ et } \operatorname{rg} g = \operatorname{rg} D_g = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.}$$

On vérifie sans problème que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = 3$.

j. Puisque $f - \mathrm{Id}_E = -g$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) &= \mathrm{Ker}(-g) \\
&= \{x \in \mathbb{E} \mid -g(x) = 0\} \\
&= \mathrm{Ker}(g) \\
&= \mathrm{Vect}((1, 0, 1)) \\
&= \boxed{\mathrm{Im}(f).}
\end{aligned}$$

2. **Étude de projecteurs complémentaires.**

Cette partie, plus théorique, a parfois été boudée alors qu'elle ne présentait que peu de difficulté.

a. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Puisque $f + g = \operatorname{Id}_E$, on trouve que $x = g(x) \in \operatorname{Im} g$.

On a bien : $\boxed{\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} g.}$

b. Puisque E est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang à f :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = n.$$

Or on sait que $\operatorname{rg} g + \operatorname{rg} f = n$. On en déduit donc que $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{rg} g.}$

c. Puisque $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} g$ et que ces deux espaces vectoriels ont même dimension (d'après la question précédente), ils sont égaux, i.e. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} g$.

Soit $x \in E$. Puisque $g(x) \in \operatorname{Im} g$, $g(x) \in \operatorname{Ker} f$, i.e. $f(g(x)) = 0$, i.e. $f \circ g(x) = 0$. On en déduit donc que $\boxed{f \circ g = 0.}$

La méthode a parfois manqué de rigueur ici. J'ai par exemple pu lire : commencer par "soit $y \in \operatorname{Im} g$ [...]" pour montrer que $f \circ g = 0$ a été une erreur fréquente. Il faut souvent réinterpréter le résultat à prouver pour savoir comment commencer le raisonnement.

d. Composons à gauche par f l'égalité $f = \operatorname{Id}_E - g$. On trouve

$$\boxed{f^2 = f \circ (\operatorname{Id}_E - g) = f - f \circ g = f.}$$

Par symétrie des rôles de f et g, il vient que $\boxed{g^2 = g.}$

Bien que cela soit anecdotique, le sort de g a souvent été oublié.

e. Par symétrie des rôles de f et g, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Ker}(g) \\
&= \{x \in E \mid g(x) = 0\} \\
&= \{x \in E \mid x - f(x) = 0\} \\
&= \{x \in E \mid f(x) - x = 0\} \\
&= \boxed{\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E).}
\end{aligned}$$

f. Remarquons que :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E).$$

On en déduit que $\operatorname{Sp}(f) \subset \{0; 1\}$ (on n'a pas nécessairement l'égalité car on pourrait avoir $\operatorname{Ker} f$ ou $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ égal à $\{0_E\}$) et que f est diagonalisable (d'après la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité).

En juxtaposant des bases (éventuellement vides) de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ et de $\operatorname{Ker} f$, on forme alors une base de E formée de vecteurs propres de f. Dans cette base, la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
& \ddots & & & (0) & \\
& & 1 & & & \\
& & & 0 & & \\
& (0) & & & \ddots & \\
& & & & & 0
\end{pmatrix}$$

où le nombre (éventuellement nul) de 1 sur la diagonale correspond à la dimension de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$, c'est-à-dire $\operatorname{rg} f$.

Le résultat est similaire pour g.

* *
*