Questions de cours

1. Énoncer le théorème du rang pour les matrices.

Exercice 1

1. Écrire une fonction `indices` en Python qui prend en argument une liste ou une chaine de caractères `sequence` et un objet `x` et qui renvoie la liste des indices où se trouve `x` dans `sequence`.

   Par exemple l'instruction `indices([-2,0,0,1,5,0,3,0],0)` *devra renvoyer la liste* `[1,2,5,7]` *tandis que l'instruction* `indices("ça fait beaucoup là, non ?","a")` *devra renvoyer la liste* `[1,4,10]`.

2. Écrire une fonction `indices_max` en Python qui prend en argument une liste de nombres (entiers et/ou flottants) et qui renvoie la liste des indices du maximum.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule et on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et on note X_n la variable aléatoire (définie sur un univers noté Ω) égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne Pour tout entier k, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro de la k-ème boule tirée s'il y a eu au moins k tirages, et 0 sinon.

1. Écrire en Python une fonction qui prend en argument un entier n et simule une réalisation de la variable X_n.
2. Déterminer la loi de X_2 puis donner son espérance et calculer sa variance.

   Pour le calcul de la variance, on pourra reconnaitre la loi de $X_2 - 1$.
3. Déterminer la loi de X_3 et donner son espérance.
4. Déterminer l'univers-image de X_n puis calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
5. Montrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1)$. *On pourra utiliser la variable aléatoire* N_1.
6. En déduire que :
$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$
7. En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n}$.
8. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ sous la forme d'une somme.
9. a. Prouver que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. *On pourra s'aider d'un graphique.*

   b. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

   c. En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
10. Montrer que $\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) - \mathbb{E}\left(X_n^2\right) = \dfrac{2\mathbb{E}\left(X_n\right) + 1}{n+1}$.
11. En déduire une expression de $\mathbb{V}(X_n)$ sous forme de somme puis un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

1. **Étude d'un exemple.**

   On considère les applications :

$$\begin{array}{rrccc} & f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & \left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}-\frac{z}{2},\ y,\ -\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right) \\ \text{et} & g: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2},\ 0,\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right) \end{array}$$

   a. Justifier rapidement pourquoi f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.
   b. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
      Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice B de g dans cette même base.
   c. Déterminer une base du noyau et de l'image de f et g.
   d. Vérifier que $f^2 = f$ et $g^2 = g$ (on rappelle que $f^2 = f \circ f$).
   e. Vérifier que $f + g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $f \circ g = g \circ f = 0$.
   f. On pose $u = (1, 0, -1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 0, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
   g. Déterminer les matrices respectives (qu'on notera D_f et D_g) de f et g dans la base $\mathcal{B}'$.
   h. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PD_fP^{-1}$ et $B = PD_gP^{-1}$.
   i. Calculer le rang de f et g et vérifier que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = 3$.
   j. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

2. **Étude de projecteurs complémentaires.**

   Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ (on n'a pas nécessairement $E = \mathbb{R}^n$) tels que $f + g = \mathrm{Id}_E$ et $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$.

   Le but de cette partie est de montrer que $f^2 = f$, $g^2 = g$ et de comparer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

   a. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Im}\, g$.
   b. Comparer $\operatorname{rg} g$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f$.
   c. En déduire que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, g$ puis que $f \circ g = 0$.
   d. En déduire alors que $f^2 = f$ et $g^2 = g$.
   e. Comparer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.
   f. (Bonus) Justifier que f et g sont diagonalisables. Donner une matrice diagonale représentant f (respectivement g) et préciser la base de E choisie.

* *
*