1. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A-\lambda I_3) &= \text{rg}\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6\lambda & 3 & 3\\ -4 & 6-6\lambda & 4\\ -2 & 3 & 5-6\lambda\end{pmatrix}\right)\\
&= \text{rg}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5-6\lambda\\ -4 & 6-6\lambda & 4\\ -6\lambda & 3 & 3\end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3\\
&= \text{rg}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5-6\lambda\\ 0 & -6\lambda & -6+12\lambda\\ 0 & 3(1-3\lambda) & P(\lambda)\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l}L_2 \leftarrow L_2-2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3-3\lambda L_1\end{array}
\end{aligned}$$

où $P(\lambda) = 3-15\lambda+18\lambda^2 = 3(1-5\lambda+6\lambda^2) = 3(1-2\lambda)(1-3\lambda)$.

- Si $\lambda = \frac{1}{3}$, $\text{rg}\left(A-\frac{1}{3}I_3\right) < 3$ donc $\lambda \in \text{Sp}(A)$.
- Supposons $\lambda \neq \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A-\lambda I_3) &= \text{rg}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5-6\lambda\\ 0 & -6\lambda & -6+12\lambda\\ 0 & 3(1-3\lambda) & P(\lambda)\end{pmatrix}\\
&= \text{rg}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5-6\lambda\\ 0 & -6\lambda & -6+12\lambda\\ 0 & 1 & 1-2\lambda\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{3(1-3\lambda)}L_3\\
&= \text{rg}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5-6\lambda\\ 0 & 1 & 1-2\lambda\\ 0 & -6\lambda & -6+12\lambda\end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3\\
&= \text{rg}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5-6\lambda\\ 0 & 1 & 1-2\lambda\\ 0 & 0 & Q(\lambda)\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3+6\lambda
\end{aligned}$$

où $Q(\lambda) = -6+12\lambda+6\lambda(1-2\lambda) = 6(1-2\lambda)(\lambda-1)$

Ainsi, $\text{rg}(A-\lambda I_3) \neq 3 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$. On en déduit que l'ensemble des valeurs propres de A est $\boxed{\text{Sp}(A) = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}}$.

<u>$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.</u>

b. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- $X \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+3y-z=0\\ y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\ y=z\end{cases}$.

  Ainsi $\boxed{E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).}$

- $X \in E_{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+3y+2z=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\ y=z\end{cases}$.

  Ainsi $\boxed{E_{\frac{1}{2}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).}$

- $X \in E_{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+3y+3z=0\\ -2y-2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=-z\end{cases}$.

  Ainsi $\boxed{E_{\frac{1}{3}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right).}$

c. La matrice $\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}}$ est une matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers une base de vecteurs propres de A. Ainsi P est inversible et :

$$\boxed{P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}}$$

d. Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=a\\ x-z=b\\ x+y+z=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-a+b+c\\ y=2a-b-c\\ z=c-a\end{cases}$$

On en déduit que :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

e. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3 = A^0$. Le résultat est donc vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors :

$$A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},$$

ce qui conclut le raisonnement par récurrence.

Ainsi, $\underline{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2^{1-n} & -2^{-n} & -2^{-n} \\ -3^{-n} & 0 & 3^{-n} \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -1+2^{1-n} & 1-2^{-n} & 1-2^{-n} \\ -1+3^{-n} & 1 & 1-3^{-n} \\ -1+2^{1-n}-3^{-n} & 1-2^{-n} & 1-2^{-n}+3^{-n} \end{pmatrix}.} \end{aligned}$$

2. Étude d'une suite matricielle

a. Soit ℓ l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est L.

Puisque $L = AL + B$, alors $\ell = a \circ \ell + b$ ou encore $(\mathrm{Id}_E - a) \circ \ell = b$. Soit $y \in \mathrm{Im}(b)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = b(x)$. Ainsi :

$$y = b(x) = (\mathrm{Id}_E - a) \circ \ell(x) = (\mathrm{Id}_E - a)\,(\ell(x)) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a).$$

On en déduit que $\boxed{\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a).}$

b. (i)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} &= X_{n+1} - L \\ &= AX_n + B - L \\ &= AX_n + B - (AL + B) \\ &= A(X_n - L) \\ &= \boxed{AY_n.} \end{aligned}$$

Un raisonnement par récurrence permet alors de montrer que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = A^nY_0.}$$

(ii) Il vient immédiatement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n(X_0 - L) + L.}$$

c. (i) On commence par établir que :

$$v \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a) \Leftrightarrow \exists u = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3,\ (\mathrm{Id}_E - a)(u) = v.$$

La matrice de $\mathrm{Id}_E - a$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tout $u = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_E - a)(u) = v &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x' - 3y' - 3z' = 6x \\ 4x' \phantom{{}-3y'} - 4z' = 6y \\ 2x' - 3y' + z' = 6z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x' - 3y' - 3z' = 6x \\ \phantom{6x'-{}} 6y' - 6z' = 18y - 12x \\ - 6y' + 6z' = 18z - 6x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x' - 3y' - 3z' = 6x \\ 6y' - 6z' = 6y - 12x \\ 0 = -18x + 18y + 18z \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système admet une solution si, et seulement si $x - y - z = 0$. Ainsi :

$$\boxed{v \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a) \Leftrightarrow x - y - z = 0.}$$

(ii) Notons que $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Vect}(b(e_1), b(e_2), b(e_3))$.
Le vecteur $b(e_1)$ admet $(3, 1, 2)$ pour coordonnées dans $\mathcal{B}$. Puisque ses coordonnées vérifient la relation $x - y - z = 0$, $b(e_1) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.
Le vecteur $b(e_2)$ admet $(-1, 0, -1)$ pour coordonnées dans $\mathcal{B}$. Puisque ses coordonnées vérifient la relation $x - y - z = 0$, $b(e_2) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.
Le vecteur $b(e_3)$ admet $(-2, -1, -1)$ pour coordonnées dans $\mathcal{B}$. Puisque ses coordonnées vérifient la relation $x - y - z = 0$, $b(e_3) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.
Puisque $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$ contient $b(e_1)$, $b(e_2)$ et $b(e_3)$, il en contient toute combinaison linéaire, i.e. $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$. D'après le résultat admis à la question 2.a, <u>il existe une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.</u>

(iii) Soit $L' = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Après calculs, on trouve :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad DL' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6x & 6y & 6z \\ 3x' & 3y' & 3z' \\ 2x'' & 2y'' & 2z'' \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & L' = DL' + P^{-1}BP \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6x & 6y & 6z \\ 3x' & 3y' & 3z' \\ 2x'' & 2y'' & 2z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 2 \\ z' = -2 \\ x'' = 0 \\ y'' = 0 \\ z'' = \dfrac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

La matrice $\boxed{L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$ convient.

(iv) Posons $L = PL'P^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned} AL + B &= (PDP^{-1})(PL'P^{-1}) + B \\ &= PDL'P^{-1} + B \\ &= P\left(DL' + P^{-1}BP\right)P^{-1} \\ &= PL'P^{-1} = L \end{aligned}$$

Après calculs, on trouve que la matrice $L = PL'P^{-1}$ ci-dessous vérifie la relation $L = AL + B$.

$$\boxed{L = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}}.$$

* *
*