Semaines 11 et 12
du lundi 8 décembre 2025 au vendredi 9 janvier 2026

Chapitre : éléments propres d'un endomorphisme

- matrice de passage : double définition (matrice de l'identité entre deux bases et matrice d'une base dans une autre), formule de changement de base, inversibilité, matrices semblables, matrices d'un même endomorphismes dans des bases différentes,
- éléments propres d'un endomorphisme : valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres, propriétés usuelles, majoration de la somme des dimension des espaces propres,
- diagonalisabilité d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie : définition (existence d'une base de E formée de vecteurs propres), caractérisation matricielle, condition suffisante de diagonalisabilité, condition nécessaire et suffisante,
- éléments propres d'une matrice carré : valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres, lien avec les éléments propres d'un endomorphisme, diagonalisation d'une matrice via matrice de passage.

Résultats à connaitre :

☐ Inversibilité des matrices de passage (*la démonstration est exigible*)

☐ Caractérisations de λ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$:

- il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$
- $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}$
- $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq 0$
- $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif
- $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas un isomorphisme (lorsque E est de dimension finie).

☐ Caractérisations de λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$
- $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$
- $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq 0$
- $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \neq n$
- la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

☐ Liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (*la démonstration est exigible*).

☐ Caractérisation de la diagonalisabilité d'un endomorphisme par la forme d'une de ses matrices

☐ Majoration de la somme des dimensions des espaces propres d'un endomorphisme,

☐ Condition suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme (*la démonstration est exigible*).

☐ Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme.

☐ Spectre d'une matrice triangulaire.

☐ Équivalence entre la diagonalisabilité d'un endomorphisme et de l'une de ses matrices