

Fonction définie par une intégrale

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et exprimer leur dérivée.

$$g_1 : x \mapsto \int_{2x}^x f(t) dt$$

$$g_2 : x \mapsto \int_0^x xf(t) dt$$

$$g_3 : x \mapsto \int_0^x f(x+t) dt.$$

[Corrigé] ★★☆

Exercice 2.

[Corrigé] ★★☆

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* .

2. Déterminer la limite de f en 0. On calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ à l'aide d'un encadrement.

Exercice 3.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et soit G la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, G(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt.$$

1. Montrer que la fonction G est prolongeable par continuité en 0 en une fonction continue sur \mathbb{R} (qu'on notera encore G).

2. Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R}^* et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, G'(x) = \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x t f'(t) dt.$$

Sommes de Riemann

Exercice 4.

Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$$

[Corrigé] ★★☆

Exercice 5.

À l'aide d'une somme de Riemann, déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 6.

[Corrigé] ★★★

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$. On pourra composer par \ln et trouver une somme de Riemann.

Exercice 7. Méthode des rectangles

[Corrigé] ★★☆

Écrire une fonction `methode_rectangles` qui prend en argument une fonction `f`, deux flottants `a` et `b` et un entier `n`, et qui renvoie une approximation de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ à l'aide de la méthode des rectangles, en approchant l'intégrale par l'aire de n rectangles.,

Calcul d'intégrales sur un segment

Exercice 8.

[Corrigé] ★★☆

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \ln(1+t^2) dt & I_2 &= \int_0^1 \arctan t dt & I_3 &= \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t} dt \\ I_4 &= \int_1^e t^n \ln t dt \quad (n \in \mathbb{N}^*) & I_5 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2} dt & I_6 &= \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t+2t}} \end{aligned}$$

Suites d'intégrales sur segment

Exercice 9.

[Corrigé] ★★☆

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{2n+3}.$$

3. En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 10.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. Vérifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
4. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

5. Montrer que : $\forall x \geqslant 0$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0.$$

6. En déduire le développement asymptotique : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 11. Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ et $I_n > 0$.

On pourra réaliser le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

3. Exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de factoriels.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

5. Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

[Corrigé] ★★☆ Convergence d'intégrales généralisées**Exercice 12.**

[Corrigé] ★★☆

Étudier la nature des intégrales généralisées et calculer leur valeur en cas de convergence.

$$\begin{array}{cccc} \int_0^1 \frac{dt}{t^2} & \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} & \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t} \\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|+t} dt & \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)} \end{array}$$

Exercice 13. Intégrales de Riemann ♡

[Corrigé] ★★☆

Étudier, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.

Exercice 14.

[Corrigé] ★★★

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin t dt$ n'est pas absolument convergente.

On découpera astucieusement l'intervalle $[0, +\infty[$.

Exercice 15. Intégration par parties

[Corrigé] ★★☆

Étudier la nature des intégrales généralisées ci-dessous puis, en cas de convergence, calculer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_0^1 \ln t dt \quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt \quad \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t dt$$

Exercice 16. Changement de variables

[Corrigé] ★★★

À l'aide d'un changement de variable, étudier la convergence des intégrales ci-dessous, puis, en cas de convergence, calculer leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ln(\sin t) dt \quad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$$

Problèmes

Exercice 17. Fonction Gamma

Pour tout $\alpha > 0$, on considère l'intégrale généralisée :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

- Soit $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, $0 \leq t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{2}} \leq 1$.

On pourra calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{2}}$.

- En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.
- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
- En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

Exercice 18.

Pour tout $x > 0$, on pose :

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

- À l'aide de $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t}$, montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, $0 \leq te^{-t} \leq 1$.
- En déduire que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.
- Établir que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.
- À l'aide d'un encadrement, montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0.$$

- Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1], 0 \leq xF(x) \leq -x \ln x + xF(1).$$

En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0^+} xF(x)$.

- Sans déterminer une expression de $F(x)$ en fonction de $x > 0$, montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ converge.

[Corrigé] ★★☆

Exercice 19. Comparaison aux intégrales de Riemann

[Corrigé] ★★★

- Soit f une fonction positive et continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

- On suppose qu'il existe $\gamma > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\gamma f(t) = 0$.

Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

- On suppose qu'il existe $\gamma \leq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\gamma f(t) = +\infty$.

Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

- Convergence des intégrales de Bertrand** $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.

- Montrer que $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha < 1$.

- Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale généralisée $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Exercice 20. (hors-programme)

[Corrigé] ★★★

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante et intégrable sur \mathbb{R}^+ .

- Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
- Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

Soit F une primitive de f sur \mathbb{R} . On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_1(x) = F(x^2) - F(2x), g_2(x) = x(F(x) - F(0)).$$

La fonction $t \mapsto x+t$ étant C^1 sur \mathbb{R} pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient, via le changement de variable $u = x+t$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(x+t) dt = \int_x^{2x} f(u) du = F(2x) - F(x).$$

La fonction F étant C^1 sur \mathbb{R} , les fonctions g_1 , g_2 et g_3 sont C^1 sur \mathbb{R} par opérations sur les fonctions C^1 et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g_1(x) &= 2xf(x^2) - 2f(2x), \\ g_2(x) &= xf(x) + \int_0^x f(t) dt, \\ g_3(x) &= 2f(2x) - f(x). \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

1. Soit G une primitive de $g : t \mapsto \frac{e^t}{t}$ sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* .

Pour tout $x \neq 0$, x et $2x$ sont de même signe donc 0 n'est pas compris entre x et $2x$ donc f est définie sur \mathbb{R}^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = G(2x) - G(x).$$

Puisque G est dérivable sur \mathbb{R}^* , on trouve que f est dérivable sur \mathbb{R}^* par opérations sur les fonctions dérivables.

2. Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [x, 2x]$, $e^x \leq e^t \leq e^{2x}$. Ainsi :

$$\forall t \in [x, 2x], \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}.$$

Par croissance de l'intégrale sur un segment (les fonctions en jeu sont continues sur $[x, 2x]$), on trouve :

$$\forall x > 0, e^x \ln 2 \leq f(x) \leq e^{2x} \ln 2.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln 2$ par passage à la limite.

Un raisonnement analogue montrerait que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \ln 2$.

On en déduit donc que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln 2$.

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

1. Soit F une primitive de f sur \mathbb{R} .

$$\forall x \neq 0, G(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2x} = \frac{1}{2} \left[\frac{F(x) - F(0)}{x} + \frac{F(0) - F(-x)}{x} \right]. \quad (1)$$

La fonction F étant dérivable sur \mathbb{R} , la fonction G est bien continue sur \mathbb{R}^* .

On trouve que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) = f(0)$ et, en posant $u : x \mapsto F(-x)$, on trouve par composition :

$$\frac{F(0) - F(-x)}{x} = \frac{u(0) - u(x)}{x} = -\frac{u(x) - u(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -u'(0) = F'(0) = f(0).$$

On en déduit que $\lim_0 G = f(0)$.

La fonction G est donc prolongeable par continuité en 0 en une fonction continue sur \mathbb{R} en posant $G(0) = f(0)$.

2. La fonction F étant dérivable sur \mathbb{R} , on tire de l'égalité (1) la dérivabilité de G sur \mathbb{R}^* par opérations sur les fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, G'(x) = -\frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x f(t) dt + \frac{f(x) + f(-x)}{2x}.$$

Les fonctions ($t \mapsto t$) et f étant de classe C^1 sur \mathbb{R} , on trouve par intégration par parties

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, G'(x) = \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x t f'(t) dt.$$

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f : t \mapsto \frac{1}{1 + t^2}.$$

Puisque la fonction f est continue sur $[0, 1]$, on reconnaît une somme de Riemann et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}.$$

Puisque la fonction f est continue sur $[0, 1]$, on reconnaît une somme de Riemann et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \ln |1+t^2| \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+2t}}.$$

Puisque la fonction f est continue sur $[0, 1]$, on reconnaît une somme de Riemann et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+2t}} = [\sqrt{1+t}]_0^1 = \sqrt{3} - 1.$$

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \right) = n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right),$$

où $f : x \mapsto \sqrt{x}$. On reconnaît une somme de Riemann d'une fonction continue sur $[0, 1]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3},$$

puis :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}.$$

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \ln \left[\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} \right] &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right). \end{aligned}$$

où $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Puisque la fonction f est continue sur $[0, 1]$, on reconnaît une somme de Riemann et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} \right] = \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

Le principe est d'approcher $\int_a^b f(t) dt$ à l'aide de $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$ puisque, après le changement de variable $t = a + (b-a)x$ (la fonction $x \mapsto a + (b-a)x$ est C^1 sur $[0, 1]$), on trouve :

$$\int_a^b f(t) dt \underset{t=a+(b-a)x}{=} (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)x) dx.$$

```
def methode_rectangles(f, a, b, n):
    somme = 0
    for k in range(n):
        somme += f(a + (b-a)*k/n)
    return somme*(b-a)/n
```

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

1. La fonction $(t \mapsto \ln(1+t^2))$ est continue sur $[0, 1]$, ce qui justifie l'existence de I_1 .

Les fonctions $(t \mapsto t)$ et $(t \mapsto \ln(1+t^2))$ étant \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, on intègre I_1 par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \ln(1+t^2) dt = \left[t \ln(1+t^2) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= \ln 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. La fonction arctan est continue sur $[0, 1]$, ce qui justifie l'existence de I_2 .

Les fonctions $(t \mapsto t)$ et arctan étant \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, on intègre I_2 par parties :

$$I_2 = \int_0^1 \arctan t dt = \left[t \arctan t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

3. La fonction $\left(t \mapsto \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\right)$ est continue sur $[0, \pi]$, ce qui justifie l'existence de I_3 .

La fonction cos étant \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$, on réalise le changement de variable $x = \cos t$. On a alors $dx = -\sin t dt$ et :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t} dt = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+3} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $(t \mapsto t^n \ln t)$ est continue sur $[1, e]$, ce qui justifie l'existence de

I_4 . Les fonctions $\left(t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}\right)$ et ln étant \mathcal{C}^1 sur $[1, e]$, on intègre I_1 par parties :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^e t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \right]_1^e - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt \\ &= \frac{ne^{n+1} + 1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

5. La fonction $\left(t \mapsto \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2}\right)$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, ce qui justifie l'existence de I_5 . La fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{t}\right)$ étant \mathcal{C}^1 sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on réalise le changement de variable $x = \frac{1}{t}$. On a alors $dx = -\frac{dt}{t^2}$ et :

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^2} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \int_1^2 \ln(1+x) dx \\ &= \left[(1+x) \ln(1+x) - x \right]_1^2 \\ &= 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

6. La fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+2t}}\right)$ est continue sur $[1, 2]$, ce qui justifie l'existence de I_6 . La fonction $(t \mapsto \sqrt{t})$ étant \mathcal{C}^1 sur $[1, 2]$, on réalise le changement de variable $x = \sqrt{t}$. On a alors $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ et :

$$I_6 = \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t+2t}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{2x+1} dx = \ln(1+2\sqrt{2}) - \ln 3.$$

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\left(t \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}\right)$ est continue sur $[0, 1]$ (car polynômale), ce qui justifie l'existence de l'intégrale du premier membre de l'égalité à prouver.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt &= \sum_{k=0}^n (-t^2)^k dt \\ &= \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} \quad \text{car } -t^2 \neq 1 \\ &= \frac{1}{1 + t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale (les fonctions en jeu sont bien continues sur $[0, 1]$), on trouve l'égalité recherchée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$.

Par croissance de l'intégrale (les fonctions intégrées sont continues sur $[0, 1]$), on a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2n+2} dt.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{2n+3}.$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 (-1)^k t^{2k} dt = \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

D'après l'égalité de la première question et la linéarité de l'intégrale (les fonctions intégrées sont continues sur $[0, 1]$), on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{2n+3}.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt = 0, \text{ i.e. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

On en déduit donc que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

1. On trouve sans difficulté que $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \ln 2$ et $u_2 = \frac{\pi}{4}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que les fonctions $\left(x \mapsto \frac{1}{1+x^n} \right)$ et $\left(x \mapsto \frac{1}{1+x^{n+1}} \right)$ sont continues sur $[0, 1]$.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx.$$

Or :

$$\forall x \in [0, 1], \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0 \text{ et } \forall x \in]0, 1[, \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} > 0.$$

Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx > 0,$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx.$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale, on trouve :

$$0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - u_n = 0$, i.e. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Les fonctions $\left(x \mapsto \frac{1}{n} \ln(1+x^n) \right)$ et $(x \mapsto x)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Par intégration par parties, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \left[\frac{x}{n} \ln(1+x^n) \right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

5. On sait déjà que, pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \geq 0$.

Étudions la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall x \geq 0, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leq 0.$$

La fonction g est donc décroissante sur \mathbb{R}_+ . Puisque $g(0) = 0$, la fonction g est négative sur \mathbb{R}_+ . On en déduit que : $\forall x \geq 0, 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, $x^n \geq 0$ donc $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale, on trouve :

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0.$$

6. D'après la question 4, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

Le résultat de la question précédente assure que :

$$\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1).$$

On en déduit le développement asymptotique recherché :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Corrigé de l'exercice 11. [Énoncé]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que la fonction \sin^n est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

La fonction $(t \mapsto \frac{\pi}{2} - t)$ est \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On peut donc poser $x = \frac{\pi}{2} - t$. On a alors $dx = -dt$ et :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx.$$

Puisque :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos^n(x) \geq 0 \text{ et } \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cos^n(x) > 0,$$

la positivité de l'intégrale assure que $I_n > 0$.

2. Remarquons que :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(1 - \sin^2(t)) dt = I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) [\sin(t) \cos^n(t)] dt.$$

Intégrons la seconde intégrale par parties, les fonctions \sin et $\frac{-1}{n+1} \cos^{n+1}$ étant \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) [\sin(t) \cos^n(t)] dt &= \left[-\frac{1}{n+1} \sin(t) \cos^{n+1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1} \cos^{n+2}(t) dt \\ &= \frac{1}{n+1} I_{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}$, i.e $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \quad \text{et} \quad I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1}.$$

Un raisonnement par récurrence montre que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = I_0 \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = I_1 \prod_{k=1}^p \frac{2k}{2k+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$. D'après la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (n+2)I_{n+1} I_{n+2} = (n+1)I_n I_{n+1} = u_n.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante, égale à $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Montrons que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) (\sin(t) - 1) dt.$$

Puisque, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$, $\sin^n(t) (\sin(t) - 1) \leq 0$. Par positivité (ou croissance) de l'intégrale, on trouve que $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et ainsi que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\frac{\pi}{2} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} \leq (n+2)I_{n+1}^2 \leq (n+2)I_nI_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}\frac{\pi}{2}.$$

Puisque les membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\frac{\pi}{2}$, on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)I_{n+1}^2 = \frac{\pi}{2}, \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n^2 = \frac{\pi}{2}. \text{ On en déduit que :}$$

$$I_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n} \quad \text{puis} \quad I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Corrigé de l'exercice 12. [\[Énoncé\]](#)

1. La fonction $(t \mapsto \frac{1}{t^2})$ est continue sur $]0, 1]$. Soit $A \in]0, 1]$.

$$\int_A^1 \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_A^1 = \frac{1}{A} - 1 \xrightarrow[A \rightarrow 0^+]{=} +\infty$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ diverge.

2. La fonction $(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}})$ est continue sur $]0, 1]$. Soit $A \in]0, 1]$.

$$\int_A^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t} \right]_A^1 = 2 - 2\sqrt{A} \xrightarrow[A \rightarrow 0^+]{=} 1$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 1$.

3. La fonction $(t \mapsto \frac{1}{t \ln t})$ est continue sur $]1, +\infty[$. Soit $A \in]1, 2]$.

$$\int_A^2 \frac{dt}{t \ln t} = \left[\ln |\ln t| \right]_A^2 = \ln |\ln 2| - \ln |\ln A| \xrightarrow[A \rightarrow 1^+]{=} +\infty$$

On en déduit que l'intégrale $\int_1^2 \frac{dt}{t \ln t}$ diverge donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$ diverge aussi.

4. La fonction $(t \mapsto \frac{\ln t}{t})$ est continue sur $[1, +\infty[$. Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^A \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{1}{2} \ln^2 t \right]_1^A = \frac{1}{2} \ln^2 A \xrightarrow[A \rightarrow 1^+]{=} +\infty$$

On en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$ diverge.

5. La fonction $(t \mapsto e^{-2|t|+t})$ est continue sur \mathbb{R} . Étudions alors la convergence des intégrales $\int_{-\infty}^0 e^{-2|t|+t} dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-2|t|+t} dt$. Remarquons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-2|t|+t} = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ e^{3t} & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Pour $A > 0$, on a $\int_0^A e^{-2|t|+t} dt = \int_0^A e^{-t} dt = 1 - e^{-A} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{=} 1$.

Pour $B < 0$, on a $\int_B^0 e^{-2|t|+t} dt = \int_B^0 e^{3t} dt = \frac{1}{3}(1 - e^{3B}) \xrightarrow[B \rightarrow -\infty]{=} \frac{1}{3}$.

On en déduit que les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-2|t|+t} dt$ et $\int_{-\infty}^0 e^{-2|t|+t} dt$ convergent donc

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|+t} dt$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|+t} dt = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

6. La fonction $(t \mapsto \frac{1}{(t+1)(t+2)})$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{dt}{(t+1)(t+2)} &= \int_0^A \frac{(t+2)-(t+1)}{(t+1)(t+2)} dt \\ &= \int_0^A \frac{1}{t+1} dt - \int_0^A \frac{1}{t+2} dt \\ &= \ln(A+1) - \ln(A+2) + \ln 2 \end{aligned}$$

$$= \ln \left(\frac{A+1}{A+2} \right) + \ln 2 \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{=} \ln 2.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = \ln 2.$$

Corrigé de l'exercice 13. [\[Énoncé\]](#)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^A \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_1^A & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \left[\ln t \right]_1^A & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1 \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln A & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Soit $\varepsilon \in]0, 1]$.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_\varepsilon^1 & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \left[\ln t \right]_\varepsilon^1 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln \varepsilon & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

On en déduit que $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Corrigé de l'exercice 14. [\[Énoncé\]](#)

La fonction \sin est continue sur $[0, +\infty[$. L'idée est de découper l'intervalle $[0, +\infty[$ de manière à pouvoir faire "sauter" la valeur absolue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2n\pi} |\sin t| dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin t| dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} |\sin t| dt + \int_{2k\pi+\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin t| dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \sin t dt + \int_{2k\pi+\pi}^{2(k+1)\pi} \sin t dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^{2\pi} \sin t dt \right) \quad (\text{par } 2\pi\text{-périodicité de sin}) \\ &= 4n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n\pi = +\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\sin t| dt$ n'est pas absolument convergente.

Corrigé de l'exercice 15. [\[Énoncé\]](#)

Corrigé de l'exercice 16. [\[Énoncé\]](#)

Corrigé de l'exercice 17. [\[Énoncé\]](#)

Corrigé de l'exercice 18. [\[Énoncé\]](#)

1. On commence par remarquer que, pour tout $t > 0$, $te^{-t} \geqslant 0$.

De plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} = 0$ par croissances comparées. Il existe donc un réel $A > 0$ tel que, pour tout $t > 0$, $te^{-t} \leqslant 1$. On en déduit que, pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant te^{-t} \leqslant 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc sur $[x, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{1}{t^2}$.

Puisque l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge aussi. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

Par continuité de g sur $]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge pour tout $x > 0$, i.e. $F(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$.

3. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_x^{+\infty} g(t) dt = \int_x^1 g(t) dt + \int_1^{+\infty} g(t) dt = F(1) - \int_1^x g(t) dt.$$

Puisque g est continue sur \mathbb{R}_+^* , g admet une primitive G sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi :

$$\forall x > 0, F(x) = F(1) - G(x) + G(1).$$

Puisque G est C^1 sur \mathbb{R}_+^* , F l'est aussi par théorèmes opératoires et :

$$\forall x > 0, F'(x) = -G'(x) = -g(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Remarquons que

$$xF(x) = \int_x^{+\infty} \frac{x}{t} e^{-t} dt.$$

Or, pour tout $t \geq x$, $0 \leq \frac{x}{t} e^{-t} \leq e^{-t}$. Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, l'intégrale de référence $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt$ converge aussi. Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$0 \leq xF(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t} dt.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = 0$ (convergence vers 0 du reste d'une intégrale généralisée), le théorème d'encadrement assure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$.

Soit $x \in]0, 1]$. La relation de Chasles permet aussi d'écrire :

$$xF(x) = x \int_x^1 \frac{dt}{t} e^{-t} + x \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} e^{-t} = x \int_x^1 \frac{dt}{t} e^{-t} + xF(1).$$

Pour tout $t \in [x, 1]$, $\frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{1}{t}$. Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$\int_x^1 \frac{dt}{t} e^{-t} \leq \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln x.$$

On en déduit que : $\forall x \in]0, 1]$, $0 \leq xF(x) \leq -x \ln x + xF(1)$. Les croissances comparées et le théorème d'encadrement permettent de conclure : $\lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = 0$.

5. Les fonctions $(x \mapsto 1)$ et F étant C^1 sur \mathbb{R}_+ . Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} xF(x) = 0$, le théorème d'intégration par parties assure alors que les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} F(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} xf(x) dx$$

sont de même nature. Or :

$$\forall x \in]0, +\infty[, xf(x) = e^{-x}.$$

L'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ étant convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ est aussi convergente.

Corrigé de l'exercice 19. [Énoncé]

1. a. Par définition de la limite, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, $t^\gamma f(t) \leq 1$. Ainsi :

$$\forall t \geq A, 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^\gamma}.$$

Puisque l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge ($\gamma \geq 1$), l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge et, par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t) dt$ converge aussi.

On en déduit que l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t) dt$ converge.

b. Par définition de la limite, il existe $B > 0$ tel que, pour tout $t \geq B$, $t^\gamma f(t) \leq 1$. Ainsi :

$$\forall t \geq B, f(t) \geq \frac{1}{t^\gamma}.$$

Puisque l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ diverge ($\gamma \leq 1$), l'intégrale $\int_B^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ diverge

et, par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_B^{+\infty} f(t) dt$ diverge aussi.

On en déduit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

2. a. Puisque la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue positive sur $[e, +\infty[$, on peut appliquer les résultats des questions précédentes.

- Si $\alpha > 1$, considérons un réel $\gamma \in]1, \alpha[$.

$$\forall t > 0, t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta}.$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\gamma f(t) = 0$, le résultat de la question 1.a assure alors que $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge.

- Si $\alpha < 1$, considérons un réel $\gamma \in]\alpha, 1[$.

$$\forall t > 0, t^\gamma f(t) = \frac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln t)^\beta}.$$

Par croissances comparées $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\gamma f(t) = +\infty$. Le résultat de la question 1.b assure alors que $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ diverge.

- b. La fonction \ln est C^1 et strictement croissante sur $[e, +\infty[$. Posons $x = \ln t$. On a alors $dx = \frac{dt}{t}$. Le théorème de changement de variable assure alors que les intégrales :

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$$

sont de même nature. Puisque l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$, l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Corrigé de l'exercice 20. [Énoncé]

1. La fonction f est décroissante sur \mathbb{R}_+ , elle admet donc une limite en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, $f(x) \leq -1$, et donc $|f(x)| \geq 1$. Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} dx$ diverge, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ diverge aussi par comparaison de fonction positives, ce qui est absurde.
- Posons $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

Si $\ell \neq 0$, il existe $A \geq 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, $f(x) \geq \frac{\ell}{2}$ si $\ell > 0$ et $f(x) \leq -\frac{\ell}{2}$ si $\ell < 0$. Ainsi :

$$\forall x \geq A, |f(x)| \geq \frac{\ell}{2}$$

Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ell}{2} dx$ diverge, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ diverge aussi par comparaison de fonction positives, ce qui est absurde. On en déduit donc que f tend vers 0 en $+\infty$.

2. Puisque f est décroissante sur \mathbb{R}_+ et tend vers 0 en $+\infty$, elle est positive sur \mathbb{R}_+ .

Soit $x > 0$. Puisque la fonction f est décroissante sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$\forall t \in \left[\frac{x}{2}, x\right], f(t) \geq f(x) \geq 0.$$

Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \geq \frac{x}{2} f(x) \geq 0.$$

Puisque :

$$\int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt = \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} f(t) dt - \int_x^{+\infty} f(t) dt,$$

la convergence du reste d'une intégrale assure que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt = 0.$$

On en déduit alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ par encadrement.