**Exercice 1.** [Corrigé] ★☆☆

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-1,1]$ et soit $Y = X^2$.

1. Montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
2. La variable aléatoire $Y$ admet-elle une espérance ? une variance ? Si oui, les calculer.

**Exercice 2.** [Corrigé] ★☆☆

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$.
2. Déterminer une densité de $X^2$.
3. Déterminer une densité de $X^3$.

**Exercice 3.** ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soient $X_1,\ X_2, \dots,\ X_n$ $n$ variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de $Y = \min(X_1,\ X_2, \dots,\ X_n)$ et en donner une densité.

**Exercice 4.** [Corrigé] ★☆☆

On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale de paramètres inconnus $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Au cours d'un entraînement, on constate que :

- 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
- 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.

Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type.
*On utilisera une table de la loi normale centrée réduite.*

**Exercice 5. Loi log-normale** [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est une densité.
2. Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(\ln X)$.

**Exercice 6.** [Corrigé] ★★☆

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Montrer que la fonction $F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ à densité. Déterminer une densité de $X$.
2. Reconnaitre la loi de la variable $Y = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$.

   Préciser si la variable Y admet une espérance et une variance. Les calculer le cas échéant.

**Exercice 7. Loi du $\chi^2$** [Corrigé] ★★☆

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et soit $Y = X^2$.

1. Montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
2. Montrer que $Y$ admet une espérance et une variance qu'on calculera.
3. a. En posant $t = \dfrac{\lambda}{2}(1+\sin\theta)$, montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(\lambda - t)}} = \pi$.

   b. Soient $U$ et $V$ deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Montrer que $U^2 + V^2$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

**Exercice 8. Loi de Cauchy** [Corrigé] ★★☆

1. Déterminer la valeur $a \in \mathbb{R}$ pour laquelle la fonction $f : t \mapsto \dfrac{a}{1+t^2}$ est une densité.
2. Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. On dit que $X$ suit **la loi de Cauchy**.

   a. Déterminer la fonction de répartition de $X$.

   b. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$, $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$, $\mathbb{P}(X \leqslant -1)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.

   c. Étudier l'existence de l'espérance de $X$ et la calculer le cas échéant.
3. Soit $V$ une variable suivant la loi uniforme sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Montrer que $\tan V$ suit la loi de Cauchy.

**Exercice 9.** [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ est une densité de probabilité.
2. Trois personnes, qu'on notera A, B et C, arrivent devant deux guichets. La personne C laisse passer les personnes A et B, et attend que le premier guichet se libère pour passer.

   On note $T_A$ et $T_B$ les variables aléatoires égales aux temps de passage respectifs des personnes A et B. On suppose que $T_A$ et $T_B$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi, et admettant $f$ pour densité.

   a. La variable aléatoire $T_A$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

   b. Déterminer la loi du temps d'attente $U$ de la personne $C$.

   c. Quelle est la probabilité que le guichet A se libère avant le B ? Retrouver le résultat par le calcul.

**Exercice 10. Loi Gamma** [Corrigé] ★★☆

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : z \mapsto \dfrac{\lambda e^{-\lambda z}(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$ est une densité de la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

**Exercice 11.** [Corrigé] ★★☆

Soient $X$ une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et $\varepsilon$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1;1\}$. On suppose que $X$ et $\varepsilon$ sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de $Y = \varepsilon X$.
2. Déterminer l'espérance et la variance - si elles existent - de la variable aléatoire $Y - 2X$.

**Exercice 12. Produits de convolution** [Corrigé] ★★☆

1. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{E}(1)$.
   a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = X + Y$.
   b. Déterminer la loi de la variable aléatoire $V = X - Y$.
2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
   Montrer que la variable aléatoire $Z = X^2 - Y$ admet pour densité la fonction :
$$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1-\sqrt{z} & \text{si } 0 < z \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Soient $V_1, \dots, V_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
   a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $M_n = \max(V_1, \dots, V_n)$.
   b. Montrer que la variable aléatoire $M_n - V_{n+1}$ est à densité et déterminer une densité.
   c. En déduire $\mathbb{P}(V_{n+1} > M_n)$.

**Exercice 13.** [Corrigé] ★★☆

Roméo et une Juliette se donnent rendez-vous à minuit (sous un balcon). L'heure d'arrivée de la Juliette suit la loi normale d'espérance minuit et d'écart-type 4 minutes. L'heure d'arrivée de Roméo suit la loi normale d'espérance minuit et cinq minutes (il a envie de se faire attendre) et d'écart-type 3 minutes. Juliette est prête à attendre au plus 10 minutes, alors que Roméo n'est prêt qu'à attendre au plus 5 minutes. Quelle est la probabilité que cette grande histoire d'amour ne commence jamais ? *On utilisera une table de la loi normale centrée réduite.*

**Exercice 14. Somme de lois normales indépendantes** [Corrigé] ★★★

Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit encore une loi normale (dont on précisera les paramètres).

**Exercice 15. Oral Agro 2008** [Corrigé] ★★★

1. Soit $\alpha$ un réel. Déterminer, en fonction de $\alpha$, l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $x^2 + x + 1 - \alpha \leqslant 0$. Lorsque l'intervalle $I$ des solutions est non vide, on précisera son intersection avec l'intervalle $[0,1]$.
2. Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
   Déterminer la fonction de répartition de $Y = X^2 + X + 1$. En déduire une densité de $Y$.
3. Calculer l'espérance de $Y$ en utilisant cette densité. Retrouver l'espérance en utilisant la définition de $Y$.

**Exercice 16. Entropie** [Corrigé] ★★★

Si une variable aléatoire $X$ admet une densité $f$, on appelle entropie de $X$ la quantité suivante (lorsqu'elle existe) :
$$h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} -f(x)\ln(f(x))\,\mathrm{d}x.$$
*Puisque* $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, *on convient que* $\ln(f(x))f(x) = 0$ *pour tout réel* $x$ *tel que* $f(x) = 0$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.
2. Soit $X$ une variable suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Montrer que $h(X) = \dfrac{1}{2}\left[1 + \ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right]$.
3. On souhaite prouver que, parmi toutes les variables aléatoires à densité, admettant une entropie de variance donnée $\sigma^2$, celles suivants les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale. On note $\varphi$ une densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
   a. Soit $Y$ une variable aléatoire d'espérance $m$, de variance $\sigma^2$ et de densité $f$ telle que la fonction $x \mapsto f(x)\ln\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que :
$$h(Y) = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)\ln(\varphi(x))\,\mathrm{d}x.$$
   b. En déduire que $h(Y) \leqslant \dfrac{1}{2}\left[1 + \ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right]$. Conclure.

**Corrigé de l'exercice 1.** [Énoncé]

1. $X(\Omega) = [-1,1]$ donc $Y(\Omega) = [0,1]$. Ainsi, pour tout $y < 0$, $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0$ et pour tout $y > 1$, $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = 1$. Soit $y \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leqslant y) &= \mathbb{P}(X^2 \leqslant y) \\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) \quad (\text{car } \sqrt{y} \in [0,1]) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt{y}) - \mathbb{P}(X \leqslant -\sqrt{y}) \\ &= \frac{\sqrt{y}+1}{2} - \frac{-\sqrt{y}+1}{2} = \sqrt{y} \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])).\end{aligned}$$

La fonction de répartition de $Y$ est donc la fonction :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

La fonction $F_Y$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ ; étudions la continuité de $F_Y$ en 0 et 1. Remarquons que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{0^-} F_Y = \lim\limits_{y\to 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{0^+} F_Y = \lim\limits_{y\to 0^+} \sqrt{y} = 0 \\ F_Y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lim\limits_{1^-} F_Y = \lim\limits_{y\to 1^-} \sqrt{y} = 1 \\ \lim\limits_{1^+} F_Y = \lim\limits_{y\to 1^+} 1 = 1 \\ F_Y(1) = 1. \end{cases}$$

On en déduit que $F_Y$ est continue en 0 et 1, et donc sur $\mathbb{R}$. Puisque $F_Y$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1, $Y$ est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_Y : y \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. **Première méthode** : via la loi de $Y$.

La fonction $f_Y$ est à support borné (dans $[0,1]$), donc $Y$ admet une espérance et un moment d'ordre 2.

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

De même :

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

La formule de König-Huygens assure que $Y$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{4}{45}.$$

**Seconde méthode** : via le théorème du transfert.

La variable aléatoire $X$ est bornée donc $X$ admet un moment d'ordre 2 et d'ordre 4, i.e. $Y = X^2$ admet un moment d'ordre 1 et d'ordre 2. Le théorème du transfert assure que :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}.$$

et :

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \mathbb{E}\left(X^4\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}x^5\right]_{-1}^1 = \frac{1}{5}.$$

On conclut de la même manière pour obtenir la variance de $Y$.

**Corrigé de l'exercice 2.** [Énoncé]

1. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Pour tout $y < 0$, $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0$.

$$\forall y \geqslant 0,\ \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant y^2) = 1 - e^{-\lambda y^2} \text{ car } y^2 \geqslant 0.$$

La fonction de répartition de $Y$ est donc :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y^2} & \text{si } y \geqslant 0. \end{cases}$$

La fonction $F_Y$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0,+\infty[$. Étudions la continuité de $F_Y$ en 0.

$$\begin{cases} \lim\limits_{0^-} F_Y = \lim\limits_{y\to 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{0^+} F_Y = \lim\limits_{y\to 0^+} 1 - e^{-\lambda y^2} = 0 \\ F_Y(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction $F_Y$ est donc continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$. Puisque $F_Y$ est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, $Y$ est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2} & \text{si } y \geqslant 0. \end{cases}$$

2. Des calculs analogues à ceux réalisés à la question précédente nous assurent que la fonction de répartition de $X^2$ est :

$$F_{X^2} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt{t}} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

La fonction $F_{X^2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Étudions la continuité de $F_{X^2}$ en 0.

$$\begin{cases} \lim\limits_{0^-} F_{X^2} = \lim\limits_{t \to 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{0^+} F_{X^2} = \lim\limits_{t \to 0^+} 1 - e^{-\lambda\sqrt{t}} = 0 \\ F_{X^2}(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction $F_{X^2}$ est donc continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$. Puisque $F_{X^2}$ est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, $X^2$ est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_{X^2} : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{t}} e^{-\lambda\sqrt{t}} & \text{si } y \geqslant 0. \end{cases}$$

3. Des calculs analogues à ceux réalisés à la question précédente nous assurent que la fonction de répartition de $X^3$ est :

$$F_{X^3} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{t}} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

La fonction $F_{X^3}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Étudions la continuité de $F_{X^3}$ en 0.

$$\begin{cases} \lim\limits_{0^-} F_{X^3} = \lim\limits_{t \to 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{0^+} F_{X^3} = \lim\limits_{t \to 0^+} 1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{t}} = 0 \\ F_{X^3}(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction $F_{X^3}$ est donc continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$. Puisque $F_{X^3}$ est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, $X^3$ est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_{X^3} : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda}{3} t^{-\frac{2}{3}} e^{-\lambda\sqrt{t}} & \text{si } y \geqslant 0. \end{cases}$$

**Corrigé de l'exercice 3.** [Énoncé]

On trouve immédiatement que $Y(\Omega) = [0, 1]$. Ainsi :

$$\forall y < 0,\ \mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0 \text{ et } \forall y > 1,\ \mathbb{P}(Y \leqslant y) = 1.$$

Soit $y \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leqslant y) &= 1 - \mathbb{P}(Y > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > y,\ \ldots, X_n > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > y) \ldots \mathbb{P}(X_n > y) \quad \text{par indépendance de } X_1, \ldots, X_n \\ &= 1 - (1 - y)^n. \end{aligned}$$

La fonction de répartition de $Y$ est :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - (1 - y)^n & \text{si } y \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté que $F_Y$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1. On vérifie aussi que $F_Y$ est continue en 0 et 1, ce qui assure que $F_Y$ est continue sur $\mathbb{R}$. La variable aléatoire est donc à densité, dont une densité est donnée par :

$$f_Y : y \mapsto \begin{cases} n(1 - y)^{n-1} & \text{si } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Corrigé de l'exercice 4.** [Énoncé]

Notons $X$ la distance (en mètres) parcoure par un javelot. Par hypothèse, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On en déduit que la variable $\tilde{X} = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(X \geqslant 75) = 0,1$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 50) = 0,25$. On en déduit que :

$$\mathbb{P}\left(\tilde{X} \geqslant \frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,1 \text{ et } \mathbb{P}\left(\tilde{X} \leqslant \frac{50 - m}{\sigma}\right) = 0,25,$$

i.e.

$$\mathbb{P}\left(\tilde{X} \leqslant \frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,9 \text{ et } \mathbb{P}\left(\tilde{X} \leqslant \frac{m - 50}{\sigma}\right) = 0,75.$$

Une table de la loi normale centrée réduite assure alors que :

$$\frac{75 - m}{\sigma} = 1,28 \text{ et } \frac{m - 50}{\sigma} = 0,67.$$

On en déduit après calculs qu'un javelot parcourt en moyenne environ 58,6 mètres, avec un écart-type de 12,8 mètres.

**Corrigé de l'exercice 5.** [Énoncé]

1. La fonction $f$ est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Étudions la nature de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f$.

   - Puisque $f=0$ sur $]-\infty,0]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
   - Étudions l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
     La fonction ln est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En posant $t=\ln x$, on obtient $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Sous réserve de convergence, le théorème de changement de variables assure que :
     $$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$
     Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

   On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1, ce qui assure que $f$ est une densité.

2. L'étude de l'existence (et le calcul) de $\mathbb{E}(X)$) amène à étudier la nature de l'intégrale :
   $$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x.$$
   Appliquons le même changement de variable qu'à la question précédente. Sous réserve de convergence, on obtient :
   $$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}+t}\,\mathrm{d}t.$$
   Remarquons que :
   $$\forall t\in\mathbb{R},\ -\frac{t^2}{2}+t=-\frac12\left[(t-1)^2-1\right].$$
   La fonction $(t\mapsto t-1)$ est strictement croissante et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $u=t-1$. Sous réserve de convergence, on a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}+t}\,\mathrm{d}t \underset{u=t-1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}+\frac12}\,\mathrm{d}u=\sqrt{e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$
   Puisque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ converge, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}+\frac12}\,du$ converge aussi par linéarité. On en déduit donc que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}+t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$ aussi. Il vient alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, i.e. $X$ admet une espérance et :
   $$\mathbb{E}(X)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}+t}\,\mathrm{d}t\sqrt{e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u=\sqrt{e}.$$

**Corrigé de l'exercice 6.** [Énoncé]

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1+e^{-x}\neq 0$, donc la fonction $F$ est dérivable (et même $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ et :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\ F'(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\geqslant 0.$$
   La fonction $F$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{-\infty}F=0$ et $\lim\limits_{+\infty}F=1$, la fonction $F$ est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle $X$.
   Puisque $F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la variable $X$ est à densité, de densité $F'$.

2. La fonction $g : x\mapsto \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{-\infty}g=-1$ et $\lim\limits_{+\infty}g=1$, $g(\mathbb{R})=]-1,1[$. Ainsi : $\forall y\leqslant -1$, $\mathbb{P}(Y\leqslant y)=0$ et $\forall y\geqslant 1$, $\mathbb{P}(Y\leqslant y)=1$.
   Soit $y\in]-1,1[$.
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(Y\leqslant y)&=\mathbb{P}\left(\frac{e^X-1}{e^X+1}\leqslant y\right)\\
   &=\mathbb{P}\left(e^X-1\leqslant y(e^X+1)\right)\quad\text{car } e^X+1>0\\
   &=\mathbb{P}(e^X(1-y)\leqslant 1+y)\\
   &=\mathbb{P}\left(e^X\leqslant\frac{1+y}{1-y}\right)\quad\text{car } 1-y>0\\
   &=\mathbb{P}\left(X\leqslant\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right)\quad\text{par croissance de la fonction exp sur }\mathbb{R}\\
   &=F\left(\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right)\\
   &=\frac{1+y}{2}=\frac{y-(-1)}{1-(-1)}
   \end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi usuelle : $Y$ suit la loi uniforme sur $]-1,1[$.

Ainsi, $Y$ admet espérance et variance : $\mathbb{E}(Y)=0$ et $\mathbb{V}(Y)=\dfrac{1}{3}$.

**Corrigé de l'exercice 7.** [Énoncé]
**Corrigé de l'exercice 8.** [Énoncé]

1. On vérifie sans difficulté que la fonction $\left(t\mapsto \dfrac{1}{1+t^2}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. On vérifie rapidement que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\pi$.

   Ainsi, $f$ est une densité de probabilité si, et seulement si, $a=\dfrac{1}{\pi}$.

2. a. Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculons $\mathbb{P}(X\leqslant x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $A\in\mathbb{R}$.

$$\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{\pi}\arctan t\right]_A^x=\frac{1}{\pi}(\arctan x-\arctan A)\underset{A\to-\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right).$$

   La fonction de répartition de $X$ est donc la fonction $\left(x\mapsto\dfrac{1}{\pi}\left(\arctan x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

   b. Il vient immédiatement que :

   - $\mathbb{P}(X\leqslant 0)=\mathbb{P}(X\geqslant 0)=\dfrac{1}{2}$ (on pouvait le retrouver sans connaitre la fonction de répartition de $X$ grâce à la parité de la densité $f$) ;
   - $\mathbb{P}(X\leqslant -1)=\mathbb{P}(X\geqslant 1)=\dfrac{1}{4}$.

   c. Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t$. L'intégrande étant paire sur $\mathbb{R}$, cette intégrale est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t$. Soit $A\in\mathbb{R}_+$.

$$\int_0^A\left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t=\int_0^A\frac{t}{\pi(1+t^2)}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|\right]_0^A=\frac{1}{2}\ln\left(1+A^2\right)\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t$ diverge, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t$ aussi.
   On en déduit que $X$ n'admet pas d'espérance.

3. Notons $T=\tan V$. Puisque $V(\Omega)=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $T(\Omega)=\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\ \mathbb{P}(T\leqslant t)&=\mathbb{P}(\tan V\leqslant t)\\&=\mathbb{P}(V\leqslant\arctan t)\quad\text{(la fonction arctan étant croissante sur }\mathbb{R})\\&=\frac{1}{\pi}\left(\arctan t+\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

   On reconnait cette fonction de répartition (cf. question 2.a) : $\tan V$ suit la loi de Cauchy.

**Corrigé de l'exercice 9.** [Énoncé]

1. La fonction $f$ est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
   On sait qu'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1 admet une espérance égale à 1, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f$ converge et vaut 1.
   La fonction $f$ est donc bien une densité de probabilité.

2. a. Étudions la convergence absolue de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

   On reconnait le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire $X$ suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, i.e. $T_A$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(T_A)=\mathbb{E}\left(X^2\right)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{E}(X)^2=2.$$

   b. Le temps d'attente de la personne $C$ est le minimum des temps de passages des personnes $A$ et $B$ : $U=\min(T_A,T_B)$. Ainsi $U(\Omega)=\mathbb{R}_+$. Soit $t\in\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U\leqslant t)&=1-\mathbb{P}(U>t)\\&=1-\mathbb{P}(T_A>t,T_B>t)\\&=1-\mathbb{P}(T_A>t)\mathbb{P}(T_B>t)\quad\text{par indépendance de }T_A\text{ et }T_B.\end{aligned}$$

   Or, après intégration par parties, on trouve :

$$\mathbb{P}(T_A>t)=\mathbb{P}(T_B>t)=\int_t^{+\infty}xe^{-x}\,\mathrm{d}x=(t+1)e^{-t}.$$

La fonction de répartition de $U$ est donc :

$$F_U : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-(t+1)^2 e^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté que $U$ est une variable à densité, dont une densité est donné par la fonction :

$$f_U : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2(t^2+t)e^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

c. Par symétrie des rôles des personnes $A$ et $B$ (les lois de $T_A$ et $T_B$ sont identique), le guichet $A$ se libère avant le $B$ avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
On peut montrer sans difficulté que la fonction $g : x \mapsto -xe^x \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x)$ est une densité de $-T_A$.
Puisque les variables aléatoires $T_B$ et $-T_A$ sont à densité et indépendantes (par le lemme des coalitions), leur somme $T_B - T_A$ est une variable aléatoire à densité, de densité $h$ donnée par le produit de convolution :

$$h : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Or :

$$f(t-x)g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t-x \geqslant 0 \\ x \leqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant t \\ x \leqslant 0. \end{cases}$$

Si $t \geqslant 0$, alors :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{0} -(t-x)e^{-(t-x)}xe^x\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} (x^2-tx)e^{2x-t}\,\mathrm{d}x.$$

Après deux intégration par parties successives, on trouve que :

$$\forall t \geqslant 0,\ h(t) = \frac{t+1}{4}e^{-t}.$$

Il est inutile de déterminer $h$ sur $\mathbb{R}_-$ car :

$$\mathbb{P}(T_A \leqslant T_B) = \mathbb{P}(T_B - T_A \geqslant 0) = \int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque la loi $\mathcal{E}(1)$ admet une espérance, on peut appliquer la linéarité de l'intégrale :

$$\mathbb{P}(T_A \leqslant T_B) = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

**Corrigé de l'exercice 10.** [Énoncé]
Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $f_1 : z \mapsto \dfrac{\lambda e^{-\lambda z}(\lambda z)^{1-1}}{(1-1)!}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z) = \lambda e^{-\lambda z}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$ est bien une densité de la variable aléatoire $S_1 = X_1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la fonction $f_n$ soit une densité de la variable $S_n$. Remarquons que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. D'après le lemme des coalitions, $S_n$ et $X_{n+1}$ sont indépendantes. Puisque ces deux variables sont à densité, une densité $g$ de leur somme $S_{n+1}$ est donnée par le produit de convolution :

$$g : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)f_1(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

Or :

$$f_n(x)f_1(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ z-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant z.$$

Distinguons alors deux cas.

  – **Premier cas** : si $z < 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)f_1(z-x) = 0$ et ainsi :

$$g(z) = 0 = f_{n+1}(z).$$

  – **Second cas** : si $z \geqslant 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^z f_n(x)f_1(z-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^z \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda(z-x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda z}\int_0^z x^{n-1}\lambda\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda z}\frac{z^n}{n} \\ &= f_{n+1}(z). \end{aligned}$$

On en déduit que $g = f_{n+1}$ (sur $\mathbb{R}$), i.e. $f_{n+1}$ est une densité de $S_{n+1}$.

On a donc prouvé par récurrence que la fonction $f_n : z \mapsto \dfrac{\lambda e^{-\lambda z}(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$ est une densité de la variable aléatoire $S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Corrigé de l'exercice 11.** [Énoncé]

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Puisque $([\varepsilon = -1], [\varepsilon = 1])$ forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leqslant y) &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1, Y \leqslant y) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1, Y \leqslant y)\\ &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1, -X \leqslant y) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1, X \leqslant y)\\ &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1)\mathbb{P}(-X \leqslant y) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1)\mathbb{P}(X \leqslant y) \text{ par indépendance de } X \text{ et } \varepsilon\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X \geqslant -y) + \mathbb{P}(X \leqslant y)\right)\\ &= \mathbb{P}(X \leqslant y) \text{ car } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\end{aligned}$$

Les variables $X$ et $Y$ ont la même fonction de répartition donc $Y$ suit la loi normale centrée réduite.

2. Par linéarité de l'espérance, $Y - 2X$ admet une espérance puisque $X$ et $Y$ admettent une espérance et $\mathbb{E}(Y - 2X) = 0$.

Remarquons que $(Y-2X)^2 = (\varepsilon-2)^2X^2$. Puisque $(\varepsilon-2)^2$ admet une espérance (c'est une variable aléatoire finie) et $X^2$ aussi, $(Y - 2X)^2$ admet une espérance par indépendance de $(\varepsilon - 2)^2$ et $X^2$ (lemme des coalitions) et :

$$\mathbb{E}\left((Y - 2X)^2\right) = \mathbb{E}\left((\varepsilon - 2)^2\right)\mathbb{E}\left(X^2\right) = 5.$$

On conclut via la formule de König-Hyugens : $Y - 2X$ admet une variance égale à 5.

**Corrigé de l'exercice 12.** [Énoncé]

1. a. Notons $f : x \mapsto e^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$ une densité de $X$ et $Y$. La variable aléatoire $U = X+Y$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité, elle est donc à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$f_U : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

Or :

$$f(x)f(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}0 \leqslant x\\ 0 \leqslant z - x\end{cases} \quad \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant z$$

- Si $z < 0$, $f(x)f(z-x) = 0$ pour tout réel $x$ et donc $f_U(z) = 0$.
- Si $z \geqslant 0$, alors :

$$f_U(z) = \int_0^z e^{-x}e^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x = e^{-z}\int_0^z \mathrm{d}x = ze^{-z}.$$

Une densité de la variable aléatoire $U = X + Y$ est donc donnée par la fonction :

$$f_U : z \mapsto \begin{cases}0 & \text{si } z < 0\\ ze^{-z} & \text{si } z \geqslant 0\end{cases}$$

b. On montre sans difficulté que $-Y$ est à densité, de densité donnée par la fonction : $f_{-Y} : y \mapsto e^y\mathbf{1}_{]\infty,0]}(y)$ . La variable aléatoire $V = X+(-Y)$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité, elle est donc à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$f_V : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)f_{-Y}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Or :

$$f(z-y)f_{-Y}(y) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}z - y \geqslant 0\\ y \leqslant 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}y \leqslant z\\ y \leqslant 0.\end{cases}$$

- Si $z < 0$, alors :

$$f_V(z) = \int_{-\infty}^z e^{-(z-y)}e^y\,\mathrm{d}y = e^{-z}\int_{-\infty}^z e^{2y}\,\mathrm{d}y = e^{-z}\left[\frac{e^{2z}}{2}\right]_{-\infty}^z = \frac{e^z}{2}.$$

- Si $z \geqslant 0$, alors :

$$f_V(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-(z-y)}e^y\,\mathrm{d}y = e^{-z}\int_{-\infty}^0 e^{2y}\,\mathrm{d}y = e^{-z}\left[\frac{e^{2z}}{2}\right]_{-\infty}^0 = \frac{e^{-z}}{2}.$$

Une densité de la variable aléatoire $V = X - Y$ est donc donnée par la fonction :

$$f_V : z \mapsto \begin{cases}\dfrac{e^z}{2} & \text{si } z < 0\\ \dfrac{e^{-z}}{2} & \text{si } z \geqslant 0.\end{cases}$$

2. Déterminons la fonction $F_{X^2}$ de répartition de la variable aléatoire $X^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x < 0$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = 0$ car $X(\Omega) = [0, 1]$.
Si $x \geqslant 0$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = P(X \leqslant \sqrt{x})$ car $X(\Omega) = [0, 1]$.

La fonction de répartition de la variable $X^2$ est la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La fonction de répartition $F_{X^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1, donc $X^2$ est une variable à densité et $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathbf{1}_{]0,1]}(x)$ en est une densité.

La variable aléatoire $-Y$ suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$ (la vérification est immédiate). On en déduit que la fonction $g = \mathbf{1}_{[-1,0]}$ est une densité de $-Y$.

Puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $X^2$ et $-Y$ le sont aussi par le lemme des coalitions. Ainsi $X^2$ et $-Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes à densité, donc leur somme $U$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité $h$ est donnée par le produit de convolution des fonctions $f$ et $g$ :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

Or :

$$(S) : f(x)g(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant z - x \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ z \leqslant x \leqslant z+1 \end{cases}$$

- Si $-1 \leqslant z \leqslant 0$, $(S) \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant z+1$ et :

$$h(z) = \int_0^{z+1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{z+1}.$$

- Si $0 \leqslant z \leqslant 1$, $(S) \Leftrightarrow z \leqslant x \leqslant 1$ et :

$$h(z) = \int_z^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 1 - \sqrt{z}.$$

- sinon, pour toute autre valeur de $z$, $(S)$ n'admet pas de solution et $h(z) = 0$.

On en déduit qu'une densité de $X^2 - Y$ est donnée par la fonction :

$$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. a. Déterminons la fonction de répartition de $M_n$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n \leqslant x) &= \mathbb{P}(V_1 \leqslant x, \dots, V_n \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(V_1 \leqslant x) \dots \mathbb{P}(V_n \leqslant x) \quad \text{par indépendance des variables } V_1, \dots, V_n \\ &= \mathbb{P}(V_1 \leqslant x)^n \quad \text{puisque } V_1, \dots, V_n \text{ suivent la même loi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que $M_n$ est à densité, de densité donnée par :

$$f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b. Les variables aléatoires $M_n$ et $-V_{n+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes par le lemme des coalitions puisque $V_1, \dots, V_{n+1}$ sont indépendantes.
La variable aléatoire $M_n - V_{n+1}$ est alors la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité ($-V_{n+1}$ suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$, de densité $g = \mathbf{1}_{[-1,0]}$), elle est donc à densité, de densité $h$ donnée par le produit de convolution :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{M_n}(x)g(z-x)\,\mathrm{d}x$$

Or :

$$f_{M_n}(x)g(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant z - x \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ z \leqslant x \leqslant z+1 \end{cases}$$

- Si $z < -1$ ou si $z > 1$, $f_{M_n}(x)g(z-x) = 0$ pour tout réel $x$ et donc $h(z) = 0$.
- Si $z \in [-1, 0]$, alors :

$$h(z) = \int_0^{z+1} nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = (z+1)^n.$$

- Si $z \in [0, 1]$, alors :

$$h(z) = \int_z^1 nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = 1 - z^n.$$

Une densité de $M_n - V_{n+1}$ est donc donnée par la fonction :

$$h : z \mapsto \begin{cases} (z+1)^n & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1 - z^n & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c. Utilisons le fait qu'on connaisse une densité de $M_n - V_{n+1}$ :

$$\mathbb{P}(V_{n+1} > M_n) = \mathbb{P}(M_n - V_{n+1} < 0) = \int_{-\infty}^{0} h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{0} (z+1)^n\,\mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}.$$

**Corrigé de l'exercice 13.** [Énoncé]

Notons $R$ et $J$ les différences de temps (en minutes) entre les temps d'arrivée respectifs de Roméo et Juliette et minuit. D'après l'énoncé, $R \hookrightarrow \mathcal{N}(5,9)$ et $R \hookrightarrow \mathcal{N}(0,16)$

Par linéarité de l'espérance, $R - J$ admet une espérance, égale à 5. Par indépendance (supposée) de $R$ et $J$, $R - J$ admet une variance égale à 25. Puisque $R$ et $J$ suivent des lois normales indépendantes, $R - J$ suit la loi normale d'espérance 5 et d'écart-type 5. Ainsi la variable $X = \dfrac{R-J-5}{5}$ suit la loi normale centrée réduite.

Remarquons maintenant que leur histoire ne commencera pas ce soir-là si et seulement si les événements $[R > J+10]$ ou $[J > R+5]$ sont réalisés. Or, d'après une table de la loi normale centrée réduite, on a :

$$\mathbb{P}(R > J+10) = \mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 1) = 0,1587$$
$$\text{et } \mathbb{P}(J > R+5) = \mathbb{P}(X < -2) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 2) = 0,0228$$

Par incompatibilité des événements $[R > J+10]$ ou $[J > R+5]$, la probabilité que cette grande histoire d'amour ne commence jamais est égale à 0,1815.

**Corrigé de l'exercice 14.** [Énoncé]

Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Notons $f_1$ et $f_2$ des densités respectives de $X_1$ et $X_2$, et $Y = X_1 + X_2$. Puisque $X_1$ et $X_2$ sont des variables aléatoires indépendantes à densité, $Y$ est une variable à densité, dont une densité $g$ est donnée par le produit de convolution :

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{R},\ g(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-x) f_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2(x-m_1)^2 + \sigma_1^2(z-x-m_2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Exprimons le polynôme en $x$ à l'intérieur de l'exponentielle sous forme canonique :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ \sigma_2^2(x-m_1)^2 + \sigma_1^2(z-x-m_2)^2 \\
&= \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)\left[x - \frac{\sigma_2^2(z-m_1) + \sigma_1^2 m_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right]^2 + \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(z-m_1-m_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ g(z) = \frac{e^{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{2\sigma_1\sigma_2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x - \frac{\sigma_2^2(z-m_1)+\sigma_1^2 m_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\right)\mathrm{d}x.$$

Réalisons le changement de variable $t = \dfrac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}\left(x - \dfrac{\sigma_2^2(z-m_1)+\sigma_1^2 m_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$ (possible car la fonction associée est strictement croissante et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). On trouve alors :

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{R},\ g(z) &= \frac{e^{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{2\sigma_1\sigma_2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}} e^{-\frac{(z-(m_1+m_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}} e^{-\frac{(z-(m_1+m_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.
\end{aligned}$$

On reconnait une densité connue : $X_1 + X_2$ suit la loi normale d'espérance $m_1 + m_2$ et de variance $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

**Corrigé de l'exercice 15.** [Énoncé]

1. Notons $I$ l'ensemble des solutions de cette inéquation du second degré. Son discriminant est $\Delta = 4\alpha - 3$.

   - Si $\alpha < \dfrac{3}{4}$, $I = \emptyset$.
   - Si $\alpha = \dfrac{3}{4}$, $I = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. Remarquons que $I \cap [0,1] = \emptyset$.
   - Si $\alpha > \dfrac{3}{4}$, $I = \left[\dfrac{-1-\sqrt{4\alpha-3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{4\alpha-3}}{2}\right]$.

   Remarquons que $\dfrac{-1-\sqrt{4\alpha-3}}{2} < 0$. De plus, on trouve après calculs que :

   $$\frac{-1+\sqrt{4\alpha-3}}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{-1+\sqrt{4\alpha-3}}{2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \alpha \leqslant 3.$$

   Ainsi :

   $$I \cap [0,1] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \frac{3}{4} < \alpha < 1 \\ \left[0, \dfrac{-1+\sqrt{4\alpha-3}}{2}\right] & \text{si } 1 \leqslant \alpha \leqslant 3 \\ [0,1] & \text{si } \alpha > 3. \end{cases}$$

2. D'après la question précédente, la fonction de répartition de $Y$ est :

$$F_Y : \alpha \mapsto \mathbb{P}(Y \leqslant \alpha) = \mathbb{P}(X^2 + X + 1 - \alpha \leqslant 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \leqslant 1 \\ \dfrac{-1+\sqrt{4\alpha-3}}{2} & \text{si } 1 \leqslant \alpha \leqslant 3 \\ 1 & \text{si } \alpha > 3. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $F_Y$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1 et 3, et continue en 1 et 3, donc sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $Y$ est une variable à densité, dont une densité est donnée par :

$$f_Y : \alpha \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\alpha-3}} & \text{si } 1 \leqslant \alpha \leqslant 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. La variable $Y$ admet une espérance car la densité $f_Y$ est à support borné ($[1,3]$) et :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_1^3 \frac{\alpha}{\sqrt{4\alpha-3}}\,\mathrm{d}\alpha.$$

La fonction $\left(\alpha \mapsto \sqrt{4\alpha-3}\right)$ étant strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,3]$, on pose le changement de variables $x = \sqrt{4\alpha-3}$. On a alors $\alpha = \frac{1}{4}\left(x^2+3\right)$ et $\mathrm{d}\alpha = \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

Ainsi :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_1^3 \frac{\alpha}{\sqrt{4\alpha-3}}\,\mathrm{d}\alpha = \int_1^3 \frac{x^2+3}{4x} \times \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{x^2+3}{8}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{24} + \frac{3}{8}x\right]_1^3 = \frac{11}{6}.$$

On retrouve ce résultat en utilisant la linéarité de l'espérance ($X$ est bornée donc admet des moments d'ordre 1 et 2) :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}(X) + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}.$$

**Corrigé de l'exercice 16.** [Énoncé]

Si une variable aléatoire $X$ admet une densité $f$, on appelle entropie de $X$ la quantité suivante (lorsqu'elle existe) :

$$h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\ln(f(x))f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Puisque* $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$*, on convient que* $\ln(f(x))f(x) = 0$ *pour tout réel* $x$ *tel que* $f(x) = 0$.

1. L'étude de la fonction $(x \mapsto \ln x - (x-1))$ montre qu'elle est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$, admettant ainsi un maximum atteint en 1. Ainsi :

$$\forall x > 0,\ \ln x - (x-1) \leqslant 0, \text{ i.e. } \ln x \leqslant x - 1.$$

2. Sous réserve de convergence, on a :

$$\begin{aligned} h(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{(t-m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$ convergent et valent respectivement 1 et $\mathbb{V}(X)$ (par définition de la variance), donc $h(X)$ converge par linéarité et vaut :

$$\begin{aligned} h(X) &= \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) + \frac{\mathbb{V}(X)}{2\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right]. \end{aligned}$$

3. a. Avec la convention $0\ln 0 = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} -f(x)\ln(f(x)) &= -f(x)\ln(f(x)) + f(x)\ln(\varphi(x)) - f(x)\ln(\varphi(x)) \\ &= -f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) - f(x)\ln(\varphi(x)) \\ &= -f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)f(x) + \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}f(x). \end{aligned}$$

Puisque $f$ est une densité de probabilité et puisque $Y$ admet pour espérance $m$ et pour variance $\sigma^2$, les intégrales $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}f(x)\,\mathrm{d}x$ converge par linéarité.

On en déduit que $h(Y)$ converge par linéarité, et :

$$\begin{aligned} h(Y) &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)\ln(\varphi(x))\,\mathrm{d}x \\ &\left(= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

b. La question 1 nous assure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$ :

$$-f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = f(x)\ln\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right) \leqslant \varphi(x) - f(x).$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient que $-\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) \mathrm{d}x \leqslant 0$.

On déduit de l'égalité de la question précédente que $h(Y) \leqslant \dfrac{1}{2}\left[1 + \ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right]$.

Concluons désormais. Remarquons que pour tout variable $Y$ admettant espérance et variance, son entropie existe si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) \mathrm{d}x$ converge. On a donc prouvé que, parmi toutes les variables aléatoires à densité, admettant une entropie de variance donnée $\sigma^2$, celles suivants les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale.