

Remarque 1 (Identification point/vecteur dans \mathbb{R}^n)

Si on se donne un point O de \mathbb{R}^n , l'application qui à tout point M de \mathbb{R}^n associe le vecteur \overrightarrow{OM} est une bijection.
Il est donc équivalent de parler de points ou de vecteurs dans \mathbb{R}^n , en ayant préalablement fixé un point (l'origine).

1 Produit scalaire dans \mathbb{R}^n **1.1 Définition et premières propriétés****Définition 2**

Soient $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{v} = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

On appelle **produit scalaire** de \vec{u} et \vec{v} le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

La notation du produit scalaire peut varier dans la littérature : on peut trouver $(\vec{u} | \vec{v})$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$.

Exemple 3 (Calcul de produits scalaires)

Calculons le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} dans les différents cas suivants :

$$(i) \quad \vec{u} = (1, 0, 1), \quad \vec{v} = (-2, 3, 4) \qquad (ii) \quad \vec{u} = (0, 1, 2, 3), \quad \vec{v} = (4, 3, 2, 1)$$

Proposition 4 (*Propriétés du produit scalaire*)

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de \mathbb{R}^n et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- (i) $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$
- (ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie du produit scalaire)
- (iii) $(\vec{v} + \lambda \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \lambda \vec{w} \cdot \vec{u}$ (linéarité par rapport à la première variable)
- (iv) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \lambda \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda \vec{u} \cdot \vec{w}$ (linéarité par rapport à la seconde variable)
- (v) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ (positivité du produit scalaire)
- (vi) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ (le produit scalaire est défini).

Démonstration admise.

Remarque 5

L'application $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ est dite **bilinéaire** (i.e linéaire par rapport à chacune de ses variables), **symétrique, définie positive**.

Corollaire 6 (Bilinéarité du produit scalaire)

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ un p -uplet de réels et (μ_1, \dots, μ_q) un q -uplet de réels.

Soient $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ un p -uplet de vecteurs de \mathbb{R}^n et $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q)$ un q -uplet de vecteurs de \mathbb{R}^n . Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{u}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^q \mu_j \vec{v}_j \right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j \vec{u}_i \cdot \vec{v}_j$$

Démonstration admise.

1.2 Norme euclidienne

Définition 7

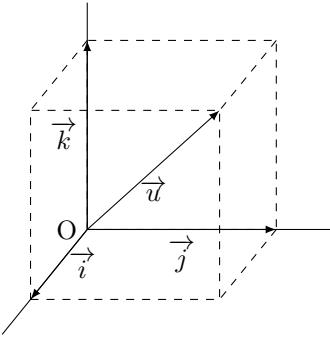
Soit \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^n .

On appelle **norme euclidienne** (ou plus simplement **norme**) du vecteur \vec{u} le réel noté $\|\vec{u}\|$ défini par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Exemple 8 (Calcul de norme)

Calculons la norme du vecteur \vec{u} représenté dans le repère orthonormé ci-dessous :



Proposition 9

Soient \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^n et λ un réel. Alors :

$$(i) \quad \|\vec{u}\| \geq 0 \quad (ii) \quad \|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\| \quad (iii) \quad \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

Démonstration admise.

Théorème 10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^n , on a :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Démonstration.

Exemple 11 (Application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Montrons que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x + y + z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}$.

Théorème 12 (Inégalité triangulaire)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^n , on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

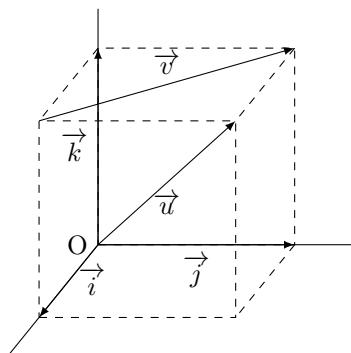
Démonstration.

1.3 Orthogonalité**Définition 13**

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^n sont **orthogonaux** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple 14

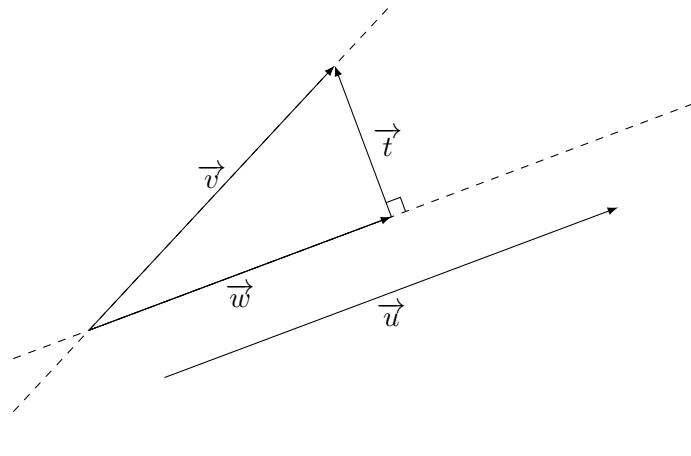
Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} représentés dans le repère orthonormé ci-dessous sont-ils orthogonaux ?

**Remarque 15**

La bilinéarité du produit scalaire assure que, si deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^n sont orthogonaux, alors, pour tous réels λ et μ , $\lambda\vec{u}$ et $\mu\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exemple 16

Comparer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$ (en supposant que les vecteurs \vec{u} et \vec{w} sont colinéaires).

**Définition 17**

On dit qu'une $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ de vecteurs de \mathbb{R}^n est une **famille orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont deux-à-deux orthogonaux, i.e.

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0.$$

On dit qu'une $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ de vecteurs de \mathbb{R}^n est une **famille orthonormée** (on dit aussi **orthonormale**) si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont de norme égale à 1.

Exemple 18

|| La base canonique de \mathbb{R}^n est une famille orthonormée.

Proposition 19 (Liberté d'une famille orthogonale)

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n est libre.

Démonstration.

Théorème 20 (Théorème de Pythagore)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si, et seulement si :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

Démonstration.

2 Bases orthonormées

2.1 Existence et premières propriétés

Théorème 21 (admis)

Tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n différent de $\{\vec{0}\}$ admet une base orthonormée, pouvant être complétée en une base orthonormée de \mathbb{R}^n .

Définition 22

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On appelle produit scalaire de X et Y , généralement noté $\langle X, Y \rangle$, le réel :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y \quad (\text{en identifiant } \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \text{ à } \mathbb{R}).$$

Proposition 23 (Écriture matricielle du produit scalaire)

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n . Soient \vec{x} et \vec{y} deux vecteurs de \mathbb{R}^n et soient (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) leurs coordonnées respectives dans \mathcal{B} . On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices-colonnes des coordonnées respectives de \vec{x} et \vec{y} dans \mathcal{B} . En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à \mathbb{R} , on a alors :

$$(i) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y = \langle X, Y \rangle; \quad (ii) \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = X^T X = \|X\|^2.$$

Démonstration.

Remarque 24

La propriété précédente assure que le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière **dans toutes les bases orthonormées**

Proposition 25

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n et soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

En notant (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de \vec{u} dans la base \mathcal{B} , on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \vec{u} \cdot \vec{e}_i.$$

En particulier, on a :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n (\vec{u} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\|^2 = \sum_{i=1}^n (\vec{u} \cdot \vec{e}_i)^2.$$

Démonstration.

Remarque 26

Le résultat précédent permet de déterminer les coordonnées de tout vecteur dans une base orthonormée en calculant n produits scalaires.

Remarque 27

Le même raisonnement s'applique à un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n non réduit à $\{\vec{0}\}$, comme énoncé ci-dessous.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel $F \neq \{\vec{0}\}$ de \mathbb{R}^n .

Alors, pour tout vecteur \vec{u} de F , on a :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^p (\vec{u} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i.$$

Exemple 28

Soient $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ et $\vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^2 .

1. Montrons que (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est une base orthonormée de \mathbb{R}^2 .
2. Déduisons-en les coordonnées de \vec{u} dans cette base.
3. On note $\vec{e}_3 = 2\vec{e}_2$. Vérifier que (\vec{e}_1, \vec{e}_3) est une base orthogonale de \mathbb{R}^2 .
4. A-t-on l'égalité : $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3$?

Proposition 29

Soient $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n et $\mathcal{B}_2 = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . La famille \mathcal{B}_2 est une base orthonormée de \mathbb{R}^n si, et seulement si, la matrice P de \mathcal{B}_2 dans la base \mathcal{B}_1 vérifie :

$$P^T P = I_n.$$

En particulier, la matrice de passage d'une base orthonormée de \mathbb{R}^n dans une autre (base orthonormée de \mathbb{R}^n) est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et son inverse est sa transposée.

On dit que P est une matrice (de passage) **orthogonale**.

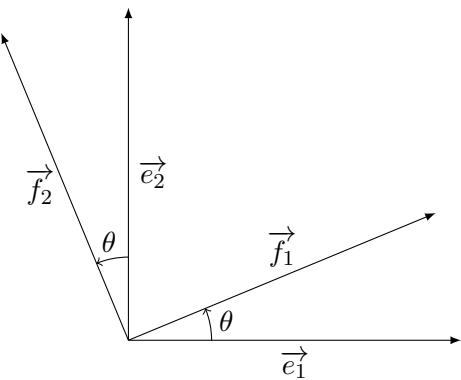
Démonstration.

Remarque 30

On utilisera très souvent ce résultat pour passer de la base canonique de \mathbb{R}^n à une autre base orthonormée de \mathbb{R}^n .

Exemple 31 (Matrice de rotation)

On représente ci-dessous les vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$, \vec{f}_1 et \vec{f}_2 de \mathbb{R}^2 (construits par rotation d'un angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$). Déterminons la matrice P de passage de (\vec{e}_1, \vec{e}_2) à (\vec{f}_1, \vec{f}_2) puis son inverse P^{-1} .

**2.2 Diagonalisation des matrices symétriques réelles****Proposition 32**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique (on note $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$).
Deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Remarque 33

On dit que les espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont **deux-à-deux orthogonaux**.

Théorème 34 (Théorème spectral - diagonalisation des matrices symétriques réelles)

Pour toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} A = PDP^T \\ P^{-1} = P^T. \end{cases}$$

Démonstration admise.

Remarque 35 À retenir

Tout matrice symétrique réelle est diagonalisable via une matrice de passage orthogonale.

Exemple 36

Diagonalisons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ via une matrice de passage orthogonale.

2.3 Projection orthogonale

Définition 37

On appelle **orthogonal** d'un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n , l'ensemble, noté F^\perp , des vecteurs de \mathbb{R}^n orthogonaux à tout vecteur de F :

$$F^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \vec{u} \in F, \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\}.$$

Exemple 38

|| Déterminer F^\perp dans le cas où $F = \{\vec{0}\}$ puis $F = \mathbb{R}^n$.

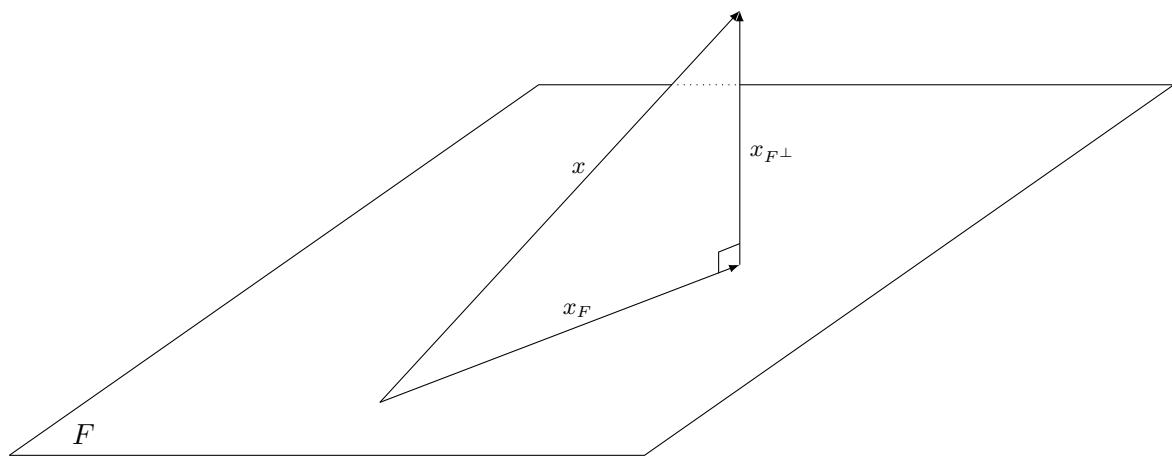
Proposition 39

Si F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , alors F^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Théorème 40 (*Décomposition d'un vecteur sur F et F^\perp*)

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ vérifiant $x = x_F + x_{F^\perp}$. Le vecteur x_F est appelé **projeté orthogonal** de x sur F .



Démonstration.

Corollaire 41

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Alors :

$$\dim F + \dim F^\perp = n.$$

Démonstration admise.

Définition 42

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . On appelle **projection orthogonale** sur F l'application qui, à tout vecteur de \mathbb{R}^n associe son projeté orthogonal sur F .

Théorème 43 (*Écriture du projeté orthogonal dans une base orthonormée*)

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q)$ une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n . En notant p la projection orthogonale sur F , on a :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, p(\vec{u}) = \sum_{i=1}^q (\vec{u} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i.$$

Démonstration. cf démonstration du théorème 40.

Théorème 44 (*Caractérisation de la projection orthogonale*)

La projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n est l'unique endomorphisme p de \mathbb{R}^n vérifiant :

$$\begin{cases} p \circ p = p \\ \text{Im}(p) = F \\ \text{Ker}(p) = F^\perp. \end{cases}$$

Exemple 45

Déterminons le projeté orthogonal du vecteur $\vec{u} = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ sur le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de \mathbb{R}^3 où $\vec{e}_1 = (1, -1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 0, 1)$.

Exemple 46

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à la matrice $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à identifier.
2. Justifier que A est diagonalisable puis la diagonaliser. Pouvait-on prévoir la forme de la matrice diagonale ?

2.4 Distance

Définition 47

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n . On appelle **distance** entre \vec{u} et \vec{v} le réel noté $d(\vec{u}, \vec{v})$ défini par :

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

Définition 48

Soient \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^n et A une partie non vide de \mathbb{R}^n .

On appelle **distance** entre \vec{u} et A le réel noté $d(\vec{u}, A)$ défini par :

$$d(\vec{u}, A) = \inf_{v \in A} \|\vec{u} - \vec{v}\| \quad \left(= \inf_{v \in A} d(\vec{u}, \vec{v})\right).$$

Remarque 49

La borne inférieure existe bien car l'ensemble $\{\|\vec{u} - \vec{v}\| \in \mathbb{R}, \mid \vec{v} \in A\}$ est bien non vide et minoré (par 0).

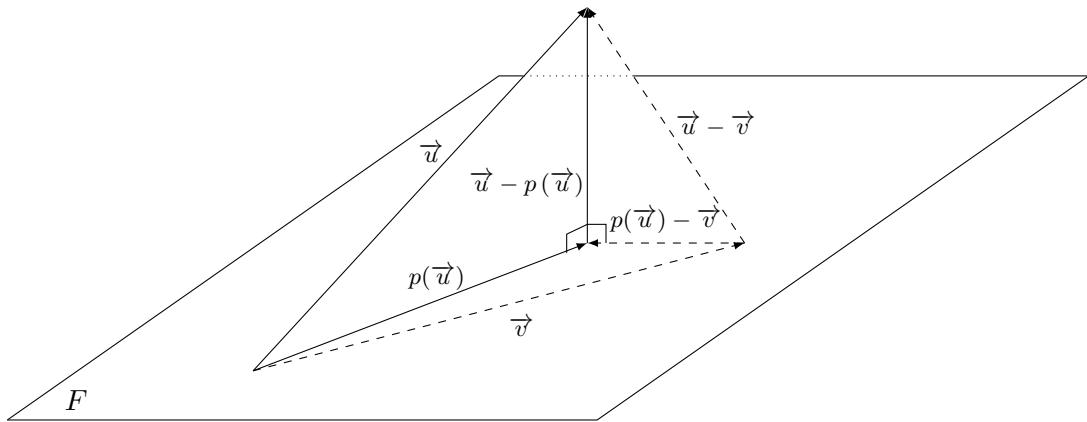
Théorème 50 (*Caractérisation de la distance à un sous-espace vectoriel par la projection orthogonale*)

Soient F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n non réduit à $\{\vec{0}\}$ et p la projection orthogonale sur F .

Pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$d(\vec{u}, F) = \|\vec{u} - p(\vec{u})\|.$$

Démonstration.



Exemple 51

|| Déterminons la distance du vecteur $\vec{u} = (5, -2) \in \mathbb{R}^2$ à la droite (vectorielle) F d'équation $\sqrt{3}x - 3y = 0$.

Remarque 52. Interprétation géométrique de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés

On considère un nuage de points $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ (d'abscisses deux-à-deux distinctes). Déterminer la droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés revient à déterminer un couple de réels (a, b) qui minimise la quantité :

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2.$$

En posant $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, et $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, on remarque que $f(a, b) = \|y - (ax + bu)\|^2$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En notant, $F = \text{Vect}(x, u)$, il vient alors que :

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} f(a, b) = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|y - (ax + bu)\|^2 = \min_{v \in F} \|y - v\|^2 = d(y, F)^2.$$

Pour rappel, le couple (\hat{a}, \hat{b}) qui minimise f sur \mathbb{R}^2 vérifie $\hat{a} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$ et $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$, où s_{xy} est la covariance du couple (x, y) et s_x^2 la variance de x .