1 Théorèmes limites

Exercice 1. [Corrigé] ★★☆

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Exercice 2. [Corrigé] ★★☆

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\forall x > 0,\ \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 3. [Corrigé] ★★☆

Déterminer le nombre de lancers d'un dé équilibré permettant d'affirmer avec un risque inférieur à $0,05$ que la fréquence d'apparition du 6 au cours des lancers diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $0,01$ en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ou le théorème central limite.

Exercice 4. [Corrigé] ★★☆

Le papa de Monsieur Haïdar (aussi appelé Monsieur Haïdar) effectue deux fois par jour, cinq jours par semaine, et pendant 46 semaines, un trajet en voiture dont la durée est une variable aléatoire qui suit une loi d'espérance 45 minutes et d'écart-type 10 minutes. On suppose que les durées des trajets sont indépendantes.

Déterminer une valeur approchée de la probabilité que Monsieur Haïdar (père) passe au moins 350 heures dans sa voiture au cours de l'année. Même question avec un écart-type de 15 minutes.

Exercice 5. [Corrigé] ★★☆

Soit x un réel et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance m et d'écart-type σ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. On suppose ici que $x < m$. On pose $\varepsilon = m - x$.
   a. Monter que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\overline{X_n} \leqslant x) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.
   b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{X_n} \leqslant x)$.
2. On suppose ici que $x > m$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{X_n} \leqslant x)$.
3. On suppose ici que $x = m$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{X_n} \leqslant x)$.

Exercice 6. [Corrigé] ★★★

soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Poisson de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leqslant n)$.
2. En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. [Corrigé] ★★★

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m et de variance σ^2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Calculer $\mathbb{E}((X - m + \lambda)^2)$ pour tout $\lambda > 0$.
2. Démontrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(X - m \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \lambda^2}$
3. En déduire que $\mathbb{P}(X - m \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$.
4. Démontrer que $\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$. Pour quelles valeurs de α obtient-on une meilleure inégalité que celle de Bienaymé-Tchebychev ?

2 Statistiques

Exercice 8. [Corrigé] ★☆☆

1. Écrire une fonction `moyenne_normale` qui simule n fois la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et qui renvoie la moyenne des valeurs obtenues.
2. En déduire une fonction `confiance` qui, étant donné un réel strictement positif ε, simule N fois la moyenne de n variables aléatoires de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et qui renvoie la proportion des moyennes dans l'intervalle $[m - \varepsilon, m + \varepsilon]$.

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

On suppose que le poids d'un nouveau-né est une variable aléatoire suivant une loi d'écart-type 0,5 kg.

Le poids moyen des 49 enfants nés en janvier 2018 dans un hôpital parisien est de 3,6 kg.

1. Déterminer un intervalle de confiance à 95% pour le poids moyen d'un nouveau-né dans cet hôpital.
2. Quel serait le niveau de confiance d'un intervalle de longueur 0,1 kg centré en 3,6 pour ce poids moyen ?

Exercice 10. [Corrigé] ★★☆

Un appareil de télécommunication reçoit un signal stocké à chaque unité de temps dans une suite de variable $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cet appareil doit détecter un signal effectif en le différenciant du bruit ambiant.

On suppose que le bruit est une suite de variables aléatoires suivant la loi normale centrée réduite et on suppose que pour un signal effectif, la moyenne n'est pas nulle.

Aujourd'hui, on a observé une suite de 40 valeurs $x_1, \dots, x_{40}$ de variance 1 et de moyenne empirique 0,6. S'agit-il de bruit ?

Construire un test pour répondre à cette question.

Exercice 11. [Corrigé] ★★★

On utilise une nouvelle variété de pommes de terre dans une exploitation agricole. Le rendement de l'ancienne variété était de 41,5 tonnes à l'hectare. La nouvelle est cultivée sur 100 hectares, avec un rendement moyen de 45 tonnes à l'hectare et un écart-type de 11,25 tonnes.

Faut-il, au vu de ce rendement, favoriser la culture de cette nouvelle variété ?

Construire un test pour répondre à cette question.

Exercice 12. [Corrigé] ★★☆

Soit $\theta \in \left[0, \dfrac{1}{10}\right]$. Dans un lot de 400 bouteilles de lait, choisies au hasard dans un stock important, on évalue le nombre de bouteilles de lait contaminées par une bactérie donnée.

Dans le stock complet, la probabilité de contamination d'une bouteille est θ.

1. On choisit de tester une à une les bouteilles, de manière indépendante. On note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la k-ème bouteille est contaminée, 0 sinon.

   a. Justifier que $Z = \dfrac{1}{400}\displaystyle\sum_{k=1}^{400} X_k$ admet pour espérance θ.

   b. Déterminer $\mathbb{V}(Z)$ et vérifier que $\mathbb{V}(Z) \leqslant \dfrac{1}{1600}$.

   c. Montrer que $\mathbb{P}(|Z-\theta| \geqslant 0,05) \leqslant 0,25$. Que peut-on en déduire ?

2. On regroupe désormais les bouteilles en 40 lots de 10. On regroupe une partie du contenu de chaque bouteille d'un lot, dont on teste la contamination.

   - Si le lot est contaminé, on teste une à une toutes les bouteilles du lot.
   - Si le lot n'est pas contaminé, on considère que les dix bouteilles du lot ne le sont pas.

   On note Y_n la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si le lot n est contaminé. On note T le nombre de tests effectués par cette méthode.

   a. Déterminer $\mathbb{E}(Y_n)$ pour tout $n \in [\![1, 40]\!]$.

   b. Justifier que $T = 40 + 10\displaystyle\sum_{k=1}^{40} Y_k$. En déduire $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 13. [Corrigé] ★★★

On veut étudier la proportion p de gens qui vont au cinéma chaque mois. On prend un échantillon de taille $n = 100$. Soit N le nombre de personnes dans l'échantillon qui vont au cinéma chaque mois.

1. Quelle est la loi de N ? Par quelle loi peut-on l'approcher ? Sous quelles conditions ?

   Par quelle loi peut-on approcher la loi de $F = \dfrac{N}{n}$?

2. On observe une proportion $f = 0,1$ de personnes allant au cinéma chaque mois. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique pour p au niveau 95%.

Exercice 14. [Corrigé] ★★★

Lors de la construction d'un collège accueillant 500 élèves, il est prévu la construction d'une cantine comprenant deux salles, chacune disposant de N places. On fait l'hypothèse que les élèvent qui mange à la cantine choisissent au hasard et de façon équiprobable l'une des deux salles, indépendamment les uns des autres.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'élèves choisissant la première salle.

1. Montrer que tous les étudiants trouvent une place si, et seulement si, $500 - N \leqslant X \leqslant N$.

2. Justifier qu'on peut considérer que la variable $Y = \dfrac{X - 250}{\sqrt{125}}$ suit une loi normale.

3. En déduire qu'il faut et il suffit que $N \geqslant 279$ pour que la probabilité que chaque élève trouve une place dans la salle qu'il a choisie soit supérieure à 0,99. *On rappelle que* $\Phi(2,58) \approx 0,995$ *où* Φ *désigne la fonction de répartition de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.