

**Semaines 15 et 16**  
du lundi 26 janvier au vendredi 6 février 2026

**Chapitre :** Variables aléatoires à densité

**Mots-clé du cours :**

- notion de densité,
- moments d'une variable aléatoire,
- lois usuelles :
  - loi uniforme sur  $[a, b]$
  - lois exponentielles
  - lois normales : densité et fonction de répartition (avec représentations graphiques), espérance et variance), simulation informatique (par outil intégré à Python que les étudiants ne doivent pas connaître par cœur), propriétés de régularité et de symétrie de la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , loi de  $aX+b$  lorsque X suit une loi normale
  - indépendance de variables aléatoires (**non nécessairement à densité**) :
    - \* définition et caractérisation,
    - \* espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes admettant une espérance,
    - \* variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes admettant une variance,
    - \* méthode pour étudier le max/min d'une famille finie de variables aléatoires indépendantes à densité,
    - \* loi d'une somme de variables aléatoires à densité indépendantes et densité obtenue par produit de convolution des densités (la formule est à rappeler aux étudiants lors des exercices),
    - \* somme de variables aléatoires indépendantes gaussiennes

**Chaque étudiant devra déterminer lors d'un exercice la loi de la somme de deux variables aléatoires à densité via un produit de convolution.**

**Résultats à connaître :**

- caractérisation de variables aléatoires à densité (par leur fonction de répartition),
- Si  $X$  admet une espérance,  $aX + b$  admet une espérance pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- linéarité de l'espérance
- théorème du transfert pour les variables aléatoires à densité,
- loi uniforme sur  $[a, b]$  :
  - densité,
  - fonction de répartition (**démonstration exigible**),
  - espérance (**démonstration exigibles**),
  - variance (**démonstration exigible**)
  - simulation en Python
- loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  :
  - densité,
  - fonction de répartition (**démonstration exigible**),
  - espérance (**démonstration exigible**),
  - variance (**démonstration exigible**)
  - lien avec la loi uniforme sur  $[0, 1[$  (**démonstration exigible**)
  - simulation en Python

- absence de mémoire
- lois normales :
  - densité,
  - espérance (**démonstration exigible** en retrouvant l'espérance de la loi normale centrée réduite) ,
  - variance (**démonstration exigible** en retrouvant la variance de la loi normale centrée réduite),
- loi de  $aX + b$  lorsque  $X$  suit une loi normale et  $a \neq 0$ ,
- loi de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes,
- loi de la somme de deux variables aléatoires normales indépendantes (+ généralisation à une somme finie),