Exercice 1. Identités de polarisation ♡ [Corrigé] ★☆☆

Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x \mid y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).\end{aligned}$$

Exercice 2. Identité du parallélogramme [Corrigé] ★☆☆

Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

Exercice 3. ♡ [Corrigé] ★☆☆

1. Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de l'espace de rayon 2 et de centre $\Omega(1, 1, 1)$.
2. Vérifier que le point $A(2, 2, 1+\sqrt{2})$ appartient à la sphère.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tangent à la sphère $\mathcal{S}$ au point A.

Exercice 4. [Corrigé] ★☆☆

Montrer que, pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la matrice $A + iI_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

On pourra considérer le spectre de A.

Exercice 5. ♡ [Corrigé] ★★☆

Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)$.
2. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n,\ \sum_{k=1}^n x_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

Exercice 6. ♡ [Corrigé] ★★☆

Pour chacune des matrices A ci-dessous, déterminer une matrice carrée P telle que $P^T AP$ soit une matrice diagonale.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix} \qquad A_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Exercice 7. Orthogonal d'une partie ♡ [Corrigé] ★★☆

Pour toute partie A de $E = \mathbb{R}^n$, on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux à tout vecteur de A :

$$A^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall a \in A,\ \langle x \mid a\rangle = 0\}.$$

1. Déterminer $\{0_E\}^\perp$ et $E^\perp$.
2. Soient A et B des parties de $\mathbb{R}^n$.
   a. Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
   b. Montrer que $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$.
   c. Montrer l'implication : $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
   d. Vérifier l'égalité $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

Exercice 8. Matrice d'une projection orthogonale ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit F le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + z = 0$.

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

Exercice 9. Distance à un sous-espace vectoriel ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 2, 2)$ et $e_2 = (2, 1, -2)$.

1. Montrer que la famille (e_1, e_2) est orthogonale.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale p sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ définie ci-dessous est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$:
$$\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right)$$
4. Déterminer la matrice de p dans cette base.
5. Calculer la distance du point A de coordonnées $(1, 1, 1)$ au plan F.

Exercice 10. ♡ [Corrigé] ★★★

1. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soit p la projection orthogonale sur F. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ f = f$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.
   a. Montrer que pour tout $y \in \mathrm{Im}\, f$, $f(y) = y$.
   b. Montrer que le projeté orthogonal sur $\mathrm{Ker}\, f$ de tout vecteur de $\mathrm{Im}\, f$ est le vecteur nul.
   c. En déduire que f est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 11. Étude d'une symétrie de $\mathbb{R}^3$ [Corrigé] ★★☆

On considère l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -6 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que s conserve les distances (on dit que s est une **isométrie**), i.e. :
$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|s(x)\| = \|x\|.$$
2. Déterminer l'ensemble F des points fixes de s.
3. Déterminer l'application $s \circ s$. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que l'application $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id})$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ à déterminer (en fonction de s).

Exercice 12. [Corrigé] ★★☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = A + A^T$ soit nilpotente, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$. En identifiant une matrice symétrique, montrer que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, i.e. $A^T = -A$.

Exercice 13. [Corrigé] ★★★

Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et A sa matrice dans la base canonique. On suppose que A vérifie $A + A^T = 2I_n$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Déterminer à quel espace appartient $X^T A X$ puis en déduire que $X^T A X = X^T A^T X$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$.
3. En déduire que f admet au plus une valeur propre.

Exercice 14. [Corrigé] ★★★

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = A^T A$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
2. Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. On note $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$.
3. Application : déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. [Corrigé] ★★★

On considère la fonction suivante :

$$f \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y-1)^2 + (x-3y)^2 + (y-1)^2 \end{array}$$

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$.

1. Première méthode : géométrique euclidienne.
   a. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un vecteur $u_{x,y} \in \mathbb{R}^3$ dépendant de (x,y) et un vecteur v indépendant de (x,y) tel que $f(x,y) = \|u_{x,y} - v\|^2$.
   b. Identifier l'ensemble $F = \left\{u_{x,y} \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   c. En déduire que f admet un minimum en un point de $\mathbb{R}^2$ qu'on déterminera.
2. Seconde méthode : étude des points critiques.
   a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   b. Montrer que f admet un point critique qu'on déterminera.
   c. En déduire que f admet un minimum.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Puisque $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$, on trouve :

$$\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right). \tag{1}$$

De la même manière, puisque $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$, on a :

$$\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right). \tag{2}$$

En additionnant les égalités (1) et (2), on trouve :

$$2\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

On en déduit que :

$$\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \left(\|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2\right) + \left(\|x\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2\right)\\ &= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

1. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned}M \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \Omega M = 2\\ &\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = 2\\ &\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 = 4\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4.\end{aligned}$$

   On en déduit que $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$ est une équation de la sphère $\mathcal{S}$.

2. Puisque $(2-1)^2 + (2-1)^2 + \left((1+\sqrt{2}) - 1\right)^2 = 4$, le point $A(2, 2, 1+\sqrt{2})$ appartient à la sphère.

3. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned}M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont orthogonaux}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0\\ &\Leftrightarrow (x-2) + (y-2) + \sqrt{2}(z - 1 - \sqrt{2}) = 0\\ &\Leftrightarrow x + y + \sqrt{2}z - 6 - \sqrt{2} = 0\end{aligned}$$

   Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tangent à la sphère $\mathcal{S}$ au point A est :

$$x + y + \sqrt{2}z - 6 - \sqrt{2} = 0.$$

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

Puisque la matrice A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, toutes ses valeurs propres sont réelles. Puisque $-i$ n'est pas valeur propre de A, la matrice $A + iI_n$ est inversible, i.e. $A + iI_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

1. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Considérons les deux vecteurs $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (1, \ldots, 1)$ de $\mathbb{R}^n$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle u \mid v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2$, i.e. :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

2. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

   Considérons les deux vecteurs $u = (\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$ et $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$ de $\mathbb{R}^n$.

   D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle u \mid v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2$, i.e. :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_k}^2}\right),$$

   i.e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$. On en déduit donc que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n, \ \sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2.$$

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

Après calculs, on trouve :

(i) $A_1 = P_1 D_1 P_1^T$ où $P_1^T = P_1^{-1}$, $D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $P_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

(ii) $A_2 = P_2 D_2 P_2^T$ où $P_2^T = P_2^{-1}$, $D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$;

(iii) $A_3 = P_3 D_3 P_3^T$ où $P_3^T = P_3^{-1}$, $D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(iv) $A_4 = P_4 D_4 P_4^T$ où $P_4^T = P_4^{-1}$, $D_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

1. On trouve immédiatement que :

$$\{0_E\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x \mid 0_E \rangle = 0\} = \mathbb{R}^n.$$

Soit $x \in E^\perp$. Par définition, on a :

$$\forall a \in E,\ \langle x \mid a \rangle = 0.$$

En particulier pour $a = x$, on trouve que $\langle x \mid x \rangle = 0$, i.e. $\|x\|^2 = 0$, i.e. $x = 0_E$. On en déduit que $E^\perp \subset \{0_E\}$.

Réciproquement, le vecteur nul 0_E est orthogonal à tout vecteur de E, il appartient donc bien à $E^\perp$. On en déduit donc que $E^\perp = \{0_E\}$.

2. a. Par définition, $A^\perp \subset \mathbb{R}^n$. De plus, le vecteur nul 0_E est orthogonal à tout vecteur de A, il appartient donc bien à $A^\perp$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \left(A^\perp\right)^2$.

$$\forall a \in A,\ \langle \lambda x + y \mid a \rangle = \lambda \langle x \mid a \rangle + \langle y \mid a \rangle = 0.$$

On en déduit que $\lambda x + y \in A^\perp$.
L'ensemble $A^\perp$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

b. Soit $x \in A$. Montrons que $x \in \left(A^\perp\right)^\perp$, c'est-à-dire que x est orthogonal à tout vecteur de $A^\perp$. Or par définition, tout vecteur de $A^\perp$ est orthogonal à tout vecteur de A, donc en particulier au vecteur x.
On en déduit que $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$.

c. Supposons que $A \subset B$ et montrons que $B^\perp \subset A^\perp$.
Soit $x \in B^\perp$. Montrons que $x \in A^\perp$. Soit $y \in A$. Puisque $A \subset B$, $y \in B$ et ainsi x et y sont orthogonaux. Puisque le vecteur x est orthogonal à tout vecteur de A, il appartient à $A^\perp$.
On en déduit que $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.

d. Puisque $A \subset \mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$. 'après la question précédente. Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $x \in A^\perp$. Soit $y \in \mathrm{Vect}(A)$. Il existe alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ tel que $y = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$.

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x \mid a_k \rangle = 0.$$

Le vecteur x est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{Vect}(A)$, il appartient donc à $\mathrm{Vect}(A)^\perp$.
Vérifier l'égalité $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

On propose ici deux méthodes : la première est la méthode classique, la seconde consiste à déterminer le projeté orthogonal sur la droite orthogonale au plan F.

- **Première méthode (via une base orthonormée de F).**

Déterminons une base orthonormée de F.

Les vecteurs $e_1 = (2, 1, 0)$ et $e_2 = (-1, 0, 1)$ appartiennent au plan F (leurs coordonnées vérifient l'équation définissant F). Puisqu'ils ne sont pas colinéaires, il forment une famille libre donc une base de F par un argument de cardinalité.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\langle ae_1 + be_2 \mid e_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow a\|e_1\|^2 + b\langle e_1 \mid e_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow 5a - 2b = 0$$

Le vecteur $u = 2e_1 + 5e_2 = (-1, 2, 5)$ est donc orthogonal à e_1 (et appartient à F).
Posons :

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0) \text{ et } f_2 = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1, 2, 5).$$

Par construction f_1 et f_2 sont orthogonaux ; ils forment donc une base orthonormée de F puisque : $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(e_1, 2e_1 + 5e_2) = \mathrm{Vect}(e_1, u) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

On a alors l'expression du projeté de tout vecteur orthogonal sur F :

$$\forall p_F(u) = \langle u \mid f_1 \rangle f_1 + \langle u \mid f_2 \rangle f_2.$$

Après calculs, on trouve :

$$p_F((1,0,0)) = \frac{1}{6}(5,2,-1),\ p_F((0,1,0)) = \frac{1}{6}(2,2,2) \text{ et } p_F((0,1,0)) = \frac{1}{6}(-1,2,5).$$

La matrice de la projection orthogonale sur F est donc :

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Seconde méthode (via une base orthonormée de $\mathbf{F}^\perp$).**

  Le vecteur $b = (1,-2,1)$ est normal au plan F. Il dirige donc une droite qu'on notera Δ. Notons $a = \frac{1}{\|b\|}b = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$. Le vecteur a forme une base orthonormée de Δ.

  Soit u de $\mathbb{R}^3$. Notons $p_\Delta(u)$ le projeté orthogonal sur Δ. Montrons que $u - p_\Delta(u)$ est le projeté orthogonal sur F :

  - le vecteur $u - p_\Delta(u)$ appartient à F puisqu'il est orthogonal à tout vecteur de Δ ;
  - le vecteur $p_\Delta(u) = u - (u - p_\Delta(u))$ appartient à Δ, il est donc orthogonal à tout vecteur de F.

  On en déduit que le projeté orthogonal de $u$sur F vérifie :

  $$p_F(u) = u - p_\Delta(u) = u - \langle u \mid a\rangle a.$$

  la dernière égalité étant obtenue puisque (a) est une base orthonormée de Δ.

  Calculons :

  $$\begin{aligned} p_F((1,0,0)) &= (1,0,0) - \frac{1}{6}(1,-2,1) = \frac{1}{6}(5,2,-1); \\ p_F((0,1,0)) &= (0,1,0) + \frac{2}{6}(1,-2,1) = \frac{1}{6}(2,2,2); \\ p_F((0,1,0)) &= (0,0,1) - \frac{1}{6}(1,-2,1) = \frac{1}{6}(-1,2,5). \end{aligned}$$

  La matrice de la projection orthogonale sur F est donc :

  $$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Puisque $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux, on utilise le théorème de Pythagore :

   $$\|x\|^2 = \|p(x) + (x - p(x))\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2.$$

   Par positivité de la norme, on obtient le résultat : pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\|x\| \geqslant \|p(x)\|$.

2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ f = f$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

   a. Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $f(y) = f \circ f(x) = f(x) = y$.
   On obtient le résultat attendu : pour tout $y \in \operatorname{Im} f$, $f(y) = y$.

   b. Soit p la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} f$ et soit $y \in \operatorname{Im} f$.
   Puisque $p(y)$ et $y - p(y)$ sont orthogonaux, on trouve, par le même argument qu'à la question précédente,

   $$\|y\|^2 = \|p(y)\|^2 + \|y - p(y)\|^2.$$

   Par hypothèse sur f, on obtient alors :

   $$\|y\|^2 \geqslant \|p(y)\|^2 + \|f(y - p(y))\|^2 = \|p(y)\|^2 + \|f(y) - f(p(y))\|^2 = \|p(y)\|^2 + \|y\|^2.$$

   On en déduit que $\|p(y)\|^2 = 0$, i.e. $p(y) = 0$.
   Le projeté orthogonal sur $\operatorname{Ker} f$ de tout vecteur de $\operatorname{Im} f$ est donc bien le vecteur nul.

   c. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Montrons que $f(x)$ est le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Im} f$:

   - $f(x) \in \operatorname{Im} f$;
   - vérifions que $x - f(x)$ est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Im} f$. Puisque $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = 0$, $x - f(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$. Or d'après la question précédente, tout vecteur de $\operatorname{Ker} f$ est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Im} f$. Donc $x - f(x)$ est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Im} f$.

   On a donc bien prouvé que $f(x)$ est le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Im} f$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. L'endomorphisme f est donc bien la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$.

Corrigé de l'exercice 11. [Énoncé]

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées de $s(x)$ dans cette base sont données par :

   $$AX = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - 6x_3 \\ -2x_1 - 6x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\|s(x)\|^2 &= (AX)^T(AX)\\ &= \frac{1}{49}\left((6x_1-3x_2-2x_3)^2+(-3x_1-2x_2-6x_3)^2+(-2x_1-6x_2+3x_3)^2\right)\\ &= x_1^2+x_2^2+x_3^2\\ &= \|x\|^2.\end{aligned}$$

On en déduit que s est une isométrie.

2. On cherche l'ensemble vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $s(x)=x$. Or :

$$\begin{aligned}s(x)=x &\Leftrightarrow \begin{cases}6x_1-3x_2-2x_3=7x_1\\ -3x_1-2x_2-6x_3=7x_2\\ -2x_1-6x_2+3x_3=7x_3\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-x_1-3x_2-2x_3=0\\ -3x_1-9x_2-6x_3=0\\ -2x_1-6x_2-4x_3=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x_1=-3x_2-2x_3.\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des points fixes de s est le plan :

$$F=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

3. Un rapide calcul montre que $A^2=I_3$, i.e. $s\circ s=\mathrm{Id}$. On en déduit que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et sa propre réciproque, i.e. $s^{-1}=s$.

4. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que l'application $p=\frac{1}{2}(s+\mathrm{Id})$ est une projection orthogonale. On sait alors que p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,p=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{Id})$. Or :

$$p-\mathrm{Id}=\frac{1}{2}(s+\mathrm{Id})-\mathrm{Id}=\frac{1}{2}(s-\mathrm{Id}).$$

On en déduit que p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id})=F$.

Synthèse. Montrons que p est la projection orthogonale sur F. Soit $u\in\mathbb{R}^3$.

- $p(u)\in F$ puisque $F=\mathrm{Im}\,p$.
- Montrons que $u-p(u)$ est orthogonal à tout vecteur de F. Soit v un vecteur de $F=\mathrm{Im}\,p$. Il existe alors $w\in\mathbb{R}^3$ tel que $v=p(w)=\frac{1}{2}(s-\mathrm{Id})(w)$. Notons W la matrice des coordonnées de w dans la base canonique et U celle de u.

$$\begin{aligned}\langle u-p(u)\mid v\rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(s-\mathrm{Id})(u)\mid \frac{1}{2}(s-\mathrm{Id})(w)\right\rangle\\ &= \frac{1}{4}\langle (s-\mathrm{Id})(u)\mid (s-\mathrm{Id})(w)\rangle\\ &= \frac{1}{4}((A+I_3)U)^T((A-I_3)W)\\ &= \frac{1}{4}U^T(A+I_3)^T(A-I_3)W\\ &= \frac{1}{4}U^T(A+I_3)(A-I_3)W\\ &= \frac{1}{4}U^T(A^2-I_3)W\\ &= 0.\end{aligned}$$

Le vecteur $u-p(u)$ est orthogonal à tout vecteur de F.

On en déduit que $p(u)$ est le projeté orthogonal de u sur F. Ainsi p est la projection orthogonale sur $F=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id})$.

Corrigé de l'exercice 12. [Énoncé]
Corrigé de l'exercice 13. [Énoncé]
Corrigé de l'exercice 14. [Énoncé]
Corrigé de l'exercice 15. [Énoncé]

1. Première méthode : géométrique euclidienne.

a. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x,y)=(2x+y-1)^2+(x-3y)^2+(y-1)^2=\|u_{x,y}-v\|^2$$

où $u_{x,y}=(2x+y,x-3y,y)$ et $v=(1,0,1)$.

b. $F=\left\{u_{x,y}\in\mathbb{R}^3,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{(2x+y,x-3y,y)\in\mathbb{R}^3,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}(a,b)$ où $a=(2,1,0)$ et $b=(1,-3,1)$.

c. Remarquons que :

$$d(v,F)^2=\inf_{u\in F}\|u-v\|^2=\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\|u_{x,y}-v\|^2=\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}f(x,y).$$

D'après le cours, on sait que cette borne inférieure est atteinte lorsque u est le projeté orthogonal de v sur F, qu'on notera $p(v)$. On en déduit que la fonction f admet un minimum, égal à $d(v,F)^2$.

Un rapide calcul montre que la famille (c, d), où $c = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$ et $d = \frac{1}{3\sqrt{30}}(7, -14, 5)$, forme une base orthonormée de F.

On a alors :

$$p(v) = \langle v \mid c\rangle c + \langle v \mid d\rangle d = \frac{1}{9}(10, -2, 2).$$

On en déduit que le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ est : $\min\limits_{\mathbb{R}^2} f = \|v - p(v)\|^2 = \frac{2}{3}$.

2. Seconde méthode : étude des points critiques.

a. La fonction f est polynômiale en ses deux variables donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x+y-1) = 0 + 2(x-3y) = 0 \\ 2(2x+y-1) - 6(x-3y) + 2(y-1) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 2y = 4 \\ -2x + 22y = 4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{9} \\ x = \dfrac{2}{9} \end{cases} .
\end{aligned}$$

On en déduit que f admet pour unique pour critique le point $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$.

c. Remarquons que $f(x_0, y_0) = \frac{2}{3}$. Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) &= \left(2h + k + \frac{1}{9}\right)^2 + \left(h - 3k - \frac{2}{9}\right)^2 + \left(k - \frac{7}{9}\right)^2 - \frac{2}{3} \\
&= 5h^2 + 11k^2 - 2hk \\
&= (h-k)^2 + 4h^2 + 10k^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

On en déduit que f admet un minimum, atteint en (x_0, y_0), égal à $f(x_0, y_0) = \frac{2}{3}$.