

Exercice 1. Identités de polarisation ☺

Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x | y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).\end{aligned}$$

Exercice 2. Identité du parallélogramme

Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Exercice 3. ☺

1. Déterminer une équation de la sphère \mathcal{S} de l'espace de rayon 2 et de centre $\Omega(1, 1, 1)$.
2. Vérifier que le point $A(2, 2, 1 + \sqrt{2})$ appartient à la sphère.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P} tangent à la sphère \mathcal{S} au point A .

Exercice 4.

Montrer que, pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la matrice $A + iI_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

On pourra considérer le spectre de A .

Exercice 5. ☺

Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)$.
2. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $\sum_{k=1}^n x_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$.

Exercice 6. ☺

Pour chacune des matrices A ci-dessous, déterminer une matrice carrée P telle que $P^T A P$ soit une matrice diagonale.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

[Corrigé] ★☆☆

Exercice 7. Orthogonal d'une partie ☺

Pour toute partie A de $E = \mathbb{R}^n$, on note A^\perp l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^n orthogonaux à tout vecteur de A :

$$A^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall a \in A, \langle x | a \rangle = 0\}.$$

1. Déterminer $\{0_E\}^\perp$ et E^\perp .
2. Soient A et B des parties de \mathbb{R}^n .
 - a. Montrer que A^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
 - b. Montrer que $A \subset (A^\perp)^\perp$.
 - c. Montrer l'implication : $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
 - d. Vérifier l'égalité $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.

Exercice 8. Matrice d'une projection orthogonale ☺

Soit F le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x - 2y + z = 0$.

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

Exercice 9. Distance à un sous-espace vectoriel ☺

Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 2, 2)$ et $e_2 = (2, 1, -2)$.

1. Montrer que la famille (e_1, e_2) est orthogonale.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale p sur F dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Montrer que la famille \mathcal{B} définie ci-dessous est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right)$$

4. Déterminer la matrice de p dans cette base.
5. Calculer la distance du point A de coordonnées $(1, 1, 1)$ au plan F .

Exercice 10. ☺

[Corrigé] ★★★

1. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et soit p la projection orthogonale sur F . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

2. Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n vérifiant $f \circ f = f$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.
 - a. Montrer que pour tout $y \in \text{Im } f$, $f(y) = y$.
 - b. Montrer que le projeté orthogonal sur $\text{Ker } f$ de tout vecteur de $\text{Im } f$ est le vecteur nul.
 - c. En déduire que f est la projection orthogonale sur $\text{Im } f$.

Exercice 11. Étude d'une symétrie de \mathbb{R}^3

On considère l'endomorphisme s de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -6 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que s conserve les distances (on dit que s est une **isométrie**), i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \|s(x)\| = \|x\|.$$

2. Déterminer l'ensemble F des points fixes de s .

3. Déterminer l'application $s \circ s$. Que peut-on en déduire ?

4. Montrer que l'application $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id})$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 à déterminer (en fonction de s).

Exercice 12.

[Corrigé] ★★☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = A + A^T$ soit nilpotente, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$.

En identifiant une matrice symétrique, montrer que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, i.e. $A^T = -A$.

Exercice 13.

[Corrigé] ★★★

Soient f un endomorphisme de \mathbb{R}^n et A sa matrice dans la base canonique. On suppose que A vérifie $A + A^T = 2I_n$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Déterminer à quel espace appartient $X^T A X$ puis en déduire que $X^T A X = X^T A^T X$.

2. Déterminer $\text{Ker } f$.

3. En déduire que f admet au plus une valeur propre.

Exercice 14.

[Corrigé] ★★★

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = A^T A$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2. Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. On note $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$.

3. Application : déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 15.

[Corrigé] ★★★

On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} f & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & (2x + y - 1)^2 + (x - 3y)^2 + (y - 1)^2 \end{array}$$

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction f admet un minimum sur \mathbb{R}^2 .

1. Première méthode : géométrique euclidienne.

- Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un vecteur $u_{x,y} \in \mathbb{R}^3$ dépendant de (x, y) et un vecteur v indépendant de (x, y) tel que $f(x, y) = \|u_{x,y} - v\|^2$.
- Identifier l'ensemble $F = \{u_{x,y} \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
- En déduire que f admet un minimum en un point de \mathbb{R}^2 qu'on déterminera.

2. Seconde méthode : étude des points critiques.

- Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 .
- Montrer que f admet un point critique qu'on déterminera.
- En déduire que f admet un minimum.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Puisque $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$, on trouve :

$$\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2). \quad (1)$$

De la même manière, puisque $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$, on a :

$$\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2). \quad (2)$$

En additionnant les égalités (1) et (2), on trouve :

$$2\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

On en déduit que :

$$\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (\|x\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2) + (\|x\|^2 - 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

1. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \Omega M = 2 \\ &\Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{\Omega M} \right\| = 2 \\ &\Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{\Omega M} \right\|^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4. \end{aligned}$$

On en déduit que $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$ est une équation de la sphère \mathcal{S} .

2. Puisque $(2 - 1)^2 + (2 - 1)^2 + ((1 + \sqrt{2}) - 1)^2 = 4$, le point $A(2, 2, 1 + \sqrt{2})$ appartient à la sphère.

3. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2) + (y - 2) + \sqrt{2}(z - 1 - \sqrt{2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y + \sqrt{2}z - 6 - \sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P} tangent à la sphère \mathcal{S} au point A est :

$$x + y + \sqrt{2}z - 6 - \sqrt{2} = 0.$$

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

Puisque la matrice A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, toutes ses valeurs propres sont réelles. Puisque $-i$ n'est pas valeur propre de A , la matrice $A + iI_n$ est inversible, i.e. $A + iI_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

1. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Considérons les deux vecteurs $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (1, \dots, 1)$ de \mathbb{R}^n . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle u \mid v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$, i.e. :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right).$$

2. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$.

Considérons les deux vecteurs $u = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)$ de \mathbb{R}^n .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle u \mid v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$, i.e. :

$$\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} \frac{1}{\sqrt{x_k}} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_k}^2} \right),$$

i.e. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$. On en déduit donc que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \sum_{k=1}^n x_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

Après calculs, on trouve :

$$(i) \quad A_1 = P_1 D_1 P_1^T \text{ où } P_1^T = P_1^{-1}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ et } P_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$(ii) \quad A_2 = P_2 D_2 P_2^T \text{ où } P_2^T = P_2^{-1}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix};$$

$$(iii) \quad A_3 = P_3 D_3 P_3^T \text{ où } P_3^T = P_3^{-1}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(iv) \quad A_4 = P_4 D_4 P_4^T \text{ où } P_4^T = P_4^{-1}, \quad D_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

1. On trouve immédiatement que :

$$\{0_E\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x \mid 0_E \rangle = 0\} = \mathbb{R}^n.$$

Soit $x \in E^\perp$. Par définition, on a :

$$\forall a \in E, \quad \langle x \mid a \rangle = 0.$$

En particulier pour $a = x$, on trouve que $\langle x \mid x \rangle = 0$, i.e. $\|x\|^2 = 0$, i.e. $x = 0_E$. On en déduit que $E^\perp \subset \{0_E\}$.

Réiproquement, le vecteur nul 0_E est orthogonal à tout vecteur de E , il appartient donc bien à E^\perp . On en déduit donc que $E^\perp = \{0_E\}$.

2. a. Par définition, $A^\perp \subset \mathbb{R}^n$. De plus, le vecteur nul 0_E est orthogonal à tout vecteur de A , il appartient donc bien à A^\perp .

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in (A^\perp)^2$.

$$\forall a \in A, \quad \langle \lambda x + y \mid a \rangle = \lambda \langle x \mid a \rangle + \langle y \mid a \rangle = 0.$$

On en déduit que $\lambda x + y \in A^\perp$.

L'ensemble A^\perp est donc bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

b. Soit $x \in A$. Montrons que $x \in (A^\perp)^\perp$, c'est-à-dire que x est orthogonal à tout vecteur de A^\perp . Or par définition, tout vecteur de A^\perp est orthogonal à tout vecteur de A , donc en particulier au vecteur x .

On en déduit que $A \subset (A^\perp)^\perp$.

c. Supposons que $A \subset B$ et montrons que $B^\perp \subset A^\perp$.

Soit $x \in B^\perp$. Montrons que $x \in A^\perp$. Soit $y \in A$. Puisque $A \subset B$, $y \in B$ et ainsi x et y sont orthogonaux. Puisque le vecteur x est orthogonal à tout vecteur de A , il appartient à A^\perp .

On en déduit que $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.

d. Puisque $A \subset \text{Vect}(A)$, $\text{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$. Après la question précédente. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in A^\perp$. Soit $y \in \text{Vect}(A)$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tel que $y = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x \mid a_k \rangle = 0.$$

Le vecteur x est orthogonal à tout vecteur de $\text{Vect}(A)$, il appartient donc à $\text{Vect}(A)^\perp$. Vérifier l'égalité $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

On propose ici deux méthodes : la première est la méthode classique, la seconde consiste à déterminer le projeté orthogonal sur la droite orthogonale au plan F .

• **Première méthode (via une base orthonormée de F).**

Déterminons une base orthonormée de F .

Les vecteurs $e_1 = (2, 1, 0)$ et $e_2 = (-1, 0, 1)$ appartiennent au plan F (leurs coordonnées vérifient l'équation définissant F). Puisqu'ils ne sont pas colinéaires, il forment une famille libre donc une base de F par un argument de cardinalité.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\langle ae_1 + be_2 \mid e_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow a\|e_1\|^2 + b\langle e_1 \mid e_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow 5a - 2b = 0$$

Le vecteur $u = 2e_1 + 5e_2 = (-1, 2, 5)$ est donc orthogonal à e_1 (et appartient à F). Posons :

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, 1, 0) \text{ et } f_2 = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{\sqrt{30}} (-1, 2, 5).$$

Par construction f_1 et f_2 sont orthogonaux ; ils forment donc une base orthonormée de F puisque : $F = \text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(e_1, 2e_1 + 5e_2) = \text{Vect}(e_1, u) = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

On a alors l'expression du projeté de tout vecteur orthogonal sur F :

$$\forall p_F(u) = \langle u \mid f_1 \rangle f_1 + \langle u \mid f_2 \rangle f_2.$$

Après calculs, on trouve :

$$p_F((1, 0, 0)) = \frac{1}{6}(5, 2, -1), \quad p_F((0, 1, 0)) = \frac{1}{6}(2, 2, 2) \text{ et } p_F((0, 1, 0)) = \frac{1}{6}(-1, 2, 5).$$

La matrice de la projection orthogonale sur F est donc :

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

• **Seconde méthode (via une base orthonormée de F^\perp).**

Le vecteur $b = (1, -2, 1)$ est normal au plan F . Il dirige donc une droite qu'on notera Δ . Notons $a = \frac{1}{\|b\|}b = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$. Le vecteur a forme une base orthonormée de Δ .

Soit u de \mathbb{R}^3 . Notons $p_\Delta(u)$ le projeté orthogonal sur Δ . Montrons que $u - p_\Delta(u)$ est le projeté orthogonal sur F :

- le vecteur $u - p_\Delta(u)$ appartient à F puisqu'il est orthogonal à tout vecteur de Δ ;
- le vecteur $p_\Delta(u) = u - (u - p_\Delta(u))$ appartient à Δ , il est donc orthogonal à tout vecteur de F .

On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F vérifie :

$$p_F(u) = u - p_\Delta(u) = u - \langle u | a \rangle a.$$

la dernière égalité étant obtenue puisque (a) est une base orthonormée de Δ .

Calculons :

$$\begin{aligned} p_F((1, 0, 0)) &= (1, 0, 0) - \frac{1}{6}(1, -2, 1) = \frac{1}{6}(5, 2, -1); \\ p_F((0, 1, 0)) &= (0, 1, 0) + \frac{2}{6}(1, -2, 1) = \frac{1}{3}(2, 2, 2); \\ p_F((0, 1, 0)) &= (0, 0, 1) - \frac{1}{6}(1, -2, 1) = \frac{1}{6}(-1, 2, 5). \end{aligned}$$

La matrice de la projection orthogonale sur F est donc :

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

1. Puisque $\langle e_1 | e_2 \rangle = 0$, la famille (e_1, e_2) est orthogonale.
2. Posons $f_1 = \frac{1}{\|e_1\|}e_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ et $f_2 = \frac{1}{\|e_2\|}e_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$. Les vecteurs f_1 et f_2 sont orthogonaux et normés. Puisqu'ils appartiennent à F par construction, ils en forment une base orthonormée. On sait alors que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad p(u) = \langle u | f_1 \rangle f_1 + \langle u | f_2 \rangle f_2.$$

Après calculs, on trouve :

$$p((1, 0, 0)) = \frac{1}{9}(5, 4, -2), \quad p((0, 1, 0)) = \frac{1}{9}(4, 5, 2), \quad p((0, 0, 1)) = \frac{1}{9}(-2, 2, 8).$$

La matrice de la projection orthogonale p sur F dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est donc :

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. On peut remarquer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$, où $f_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

On vérifie sans problème que f_3 est normé et orthogonal à f_1 et f_2 . La famille \mathcal{B} est donc une famille orthonormée de \mathbb{R}^3 , donc libre (les vecteurs sont deux-à-deux orthogonaux et non nuls). Par un argument de cardinalité, c'est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .

4. On pourrait faire des calculs (en utilisant l'expression de la projection orthogonale dans la base (f_1, f_2) de F) mais on propose ici une solution géométrique : f_1 et f_2 appartiennent à F donc $p(f_1) = f_1$ et $p(f_2) = f_2$.

Puisque f_3 est orthogonal à f_1 et f_2 , il est orthogonal à tout vecteur de F . Ainsi $p(f_3) = 0$.

La matrice de p dans la base \mathcal{B} est :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. En identifiant le point A au vecteur $u = (1, 1, 1)$, on trouve que la distance de A au plan F est $\|u - p(u)\|$. Or :

$$p(u) = \langle u | f_1 \rangle f_1 + \langle u | f_2 \rangle f_2 = \frac{1}{9}(7, 11, 8).$$

Ainsi, la distance du point A de coordonnées $(1, 1, 1)$ au plan F est :

$$d(A, F) = \|u - p(u)\| = \left\| \frac{1}{9}(2, -2, 1) \right\| = \frac{1}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 10. [\[Énoncé\]](#)

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Puisque $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux, on utilise le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|p(x) + (x - p(x))\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2.$$

Par positivité de la norme, on obtient le résultat : pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\|x\| \geq \|p(x)\|$.

2. Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n vérifiant $f \circ f = f$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

- a. Soit $y \in \text{Im } f$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $f(y) = f \circ f(x) = f(x) = y$.

On obtient le résultat attendu : pour tout $y \in \text{Im } f$, $f(y) = y$.

- b. Soit p la projection orthogonale sur $\text{Ker } f$ et soit $y \in \text{Im } f$.

Puisque $p(y)$ et $y - p(y)$ sont orthogonaux, on trouve, par le même argument qu'à la question précédente,

$$\|y\|^2 = \|p(y)\|^2 + \|y - p(y)\|^2.$$

Par hypothèse sur f , on obtient alors :

$$\|y\|^2 \geq \|p(y)\|^2 + \|f(y - p(y))\|^2 = \|p(y)\|^2 + \|f(y) - f(p(y))\|^2 = \|p(y)\|^2 + \|y\|^2.$$

On en déduit que $\|p(y)\|^2 = 0$, i.e. $p(y) = 0$.

Le projeté orthogonal sur $\text{Ker } f$ de tout vecteur de $\text{Im } f$ est donc bien le vecteur nul.

- c. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Montrons que $f(x)$ est le projeté orthogonal de x sur $\text{Im } f$:

- $f(x) \in \text{Im } f$;
- vérifions que $x - f(x)$ est orthogonal à tout vecteur de $\text{Im } f$. Puisque $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = 0$, $x - f(x)$ appartient à $\text{Ker } f$. Or d'après la question précédente, tout vecteur de $\text{Ker } f$ est orthogonal à tout vecteur de $\text{Im } f$. Donc $x - f(x)$ est orthogonal à tout vecteur de $\text{Im } f$.

On a donc bien prouvé que $f(x)$ est le projeté orthogonal de x sur $\text{Im } f$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. L'endomorphisme f est donc bien la projection orthogonale sur $\text{Im } f$.

Corrigé de l'exercice 11. [\[Énoncé\]](#)

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de x dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Les coordonnées de $s(x)$ dans cette base sont données par :

$$AX = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - 6x_3 \\ -2x_1 - 6x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|s(x)\|^2 &= (AX)^T(AX) \\ &= \frac{1}{49} ((6x_1 - 3x_2 - 2x_3)^2 + (-3x_1 - 2x_2 - 6x_3)^2 + (-2x_1 - 6x_2 + 3x_3)^2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit que s est une isométrie.

2. On cherche l'ensemble vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 tels que $s(x) = x$. Or :

$$\begin{aligned} s(x) = x &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7x_1 \\ -3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 7x_2 \\ -2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 - 9x_2 - 6x_3 = 0 \\ -2x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_1 = -3x_2 - 2x_3. \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des points fixes de s est le plan :

$$F = \text{Ker}(s - \text{Id}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

3. Un rapide calcul montre que $A^2 = I_3$, i.e. $s \circ s = \text{Id}$. On en déduit que s est un automorphisme de \mathbb{R}^3 et sa propre réciproque, i.e. $s^{-1} = s$.
4. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que l'application $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id})$ est une projection orthogonale. On sait alors que p est la projection orthogonale sur $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id})$. Or :

$$p - \text{Id} = \frac{1}{2}(s + \text{Id}) - \text{Id} = \frac{1}{2}(s - \text{Id}).$$

On en déduit que p est la projection orthogonale sur $\text{Ker}(s - \text{Id}) = F$.

Synthèse. Montrons que p est la projection orthogonale sur F . Soit $u \in \mathbb{R}^3$.

- $p(u) \in F$ puisque $F = \text{Im } p$.
- Montrons que $u - p(u)$ est orthogonal à tout vecteur de F . Soit v un vecteur de $F = \text{Im } p$. Il existe alors $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $v = p(w) = \frac{1}{2}(s - \text{Id})(w)$. Notons W la matrice des coordonnées de w dans la base canonique et U celle de u .

$$\begin{aligned}
 \langle u - p(u) \mid v \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(s - \text{Id})(u) \mid \frac{1}{2}(s - \text{Id})(w) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{4} \langle (s - \text{Id})(u) \mid (s - \text{Id})(w) \rangle \\
 &= \frac{1}{4} \langle (A + I_3)U \rangle^T \langle (A - I_3)W \rangle \\
 &= \frac{1}{4} U^T (A + I_3)^T (A - I_3)W \\
 &= \frac{1}{4} U^T (A + I_3)(A - I_3)W \\
 &= \frac{1}{4} U^T (A^2 - I_3)W \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Le vecteur $u - p(u)$ est orthogonal à tout vecteur de F .

On en déduit que $p(u)$ est le projeté orthogonal de u sur F . Ainsi p est la projection orthogonale sur $F = \text{Ker}(s - \text{Id})$.

Corrigé de l'exercice 12. [\[Énoncé\]](#)

Puisque $N^T = A^T + A = N$, la matrice N est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N = PDP^{-1}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$. On a alors $PD^p P^{-1} = 0_n$ (cela se montre par récurrence).

Puisque P est inversible, on trouve que $D^p = 0_n$ en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P .

Si on note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $D^p = \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)$. On trouve alors que $D = 0_n$. On en déduit que $N = P0_n P^{-1} = 0_n$, i.e. $A^T = -A$.

Corrigé de l'exercice 13. [\[Énoncé\]](#)

1. Il vient que $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis que $X^T AX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Puisque toutes les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ (qu'on peut assimiler à \mathbb{R}) sont symétriques, $X^T AX = (X^T AX)^T = X^T A^T X$

- 2. Soit $x \in \text{Ker } f$; notons X la matrice de ses coordonnées dans la base canonique. On a alors $AX = 0_{n,1}$. Remarquons alors que :

$$2\|x\|^2 = 2X^T X = X^T (2I_n) X = X^T (A + A^T) X = X^T AX + X^T A^T X = 2X^T (AX) = 0.$$

On en déduit que $x = 0$ et ainsi que $\text{Ker } f \subset \{0\}$. Puisque $\text{Ker } f$ contient toujours le vecteur nul, le noyau de f est réduit au simple vecteur nul, i.e. f est injective (et même un automorphisme de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , étant de dimension finie).

- 3. Supposons que f admette une valeur propre qu'on notera λ . Il existe alors un vecteur non nul x tel que $f(x) = \lambda x$. En reprenant les notations et calculs de la question précédente, on trouve $AX = \lambda X$ et :

$$2\|x\|^2 = 2X^T X = X^T (A + A^T) X = X^T AX + X^T A^T X = 2X^T (AX) = 2\lambda X^T X = 2\lambda\|x\|^2.$$

Puisque $x \neq 0$, $\|x\|^2 \neq 0$ et ainsi $\lambda = 1$.

On en déduit que f admet au plus une valeur propre, qui, si elle existe, est égale à 1.

Corrigé de l'exercice 14. [\[Énoncé\]](#)

1. Puisque $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et puisque $S^T = (A^T A)^T = A^T A$, la matrice S est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable en vertu du théorème spectral.

Soit λ une valeur propre de S . Il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $SX = \lambda X$.

Soit x le vecteur de \mathbb{R}^n dont la matrice des coordonnées dans la base canonique est X et soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont A est la matrice dans la base canonique.

Remarquons qu'on a :

- d'une part $X^T SX = \lambda X^T X = \lambda\|x\|^2$;
- d'autre part $X^T SX = X^T A^T AX = (AX)^T (AX) = \|f(x)\|^2$.

On en déduit que $\|f(x)\|^2 = \lambda\|x\|^2$ puis que $\lambda = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \geq 0$ puisque $x \neq 0$.

On a donc bien prouvé que $S = A^T A$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2. D'après le théorème spectral, il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^T$. Notons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\tilde{D} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. On a immédiatement l'égalité : $D = \tilde{D}^2 = \tilde{D}\tilde{D}^T$.

On obtient alors :

$$S = PDP^T = P\tilde{D}\tilde{D}^T P^T = (\tilde{D}^T P^T)^T (\tilde{D}^T P^T) = A^T A,$$

en posant $A = \tilde{D}^T P^T = \tilde{D}P^T$. Remarquez qu'on aurait pu poser $A = P\tilde{D}^T P^T$.

3. On ortho-diagonalise S sans difficulté et on peut écrire $S = PDP^T$ où $P^T = P^{-1}$ et : b. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant :

$$A = \tilde{D}P^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

on a bien $S = A^T A$ d'après les calculs de la question précédente.

Corrigé de l'exercice 15. [\[Énoncé\]](#)

1. Première méthode : géométrique euclidienne.

- a. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x, y) = (2x + y - 1)^2 + (x - 3y)^2 + (y - 1)^2 = \|u_{x,y} - v\|^2$$

où $u_{x,y} = (2x + y, x - 3y, y)$ et $v = (1, 0, 1)$.

- b. $F = \{u_{x,y} \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(2x + y, x - 3y, y) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(a, b)$
où $a = (2, 1, 0)$ et $b = (1, -3, 1)$.

- c. Remarquons que :

$$d(v, F)^2 = \inf_{u \in F} \|u - v\|^2 = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \|u_{x,y} - v\|^2 = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y).$$

D'après le cours, on sait que cette borne inférieure est atteinte lorsque u est le projeté orthogonal de v sur F , qu'on notera $p(v)$. On en déduit que la fonction f admet un minimum, égal à $d(v, F)^2$.

Un rapide calcul montre que la famille (c, d) , où $c = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$ et $d = \frac{1}{3\sqrt{30}}(7, -14, 5)$, forme une base orthonormée de F .

On a alors :

$$p(v) = \langle v \mid c \rangle c + \langle v \mid d \rangle d = \frac{1}{9}(10, -2, 2).$$

On en déduit que le minimum de f sur \mathbb{R}^2 est : $\min_{\mathbb{R}^2} f = \|v - p(v)\|^2 = \frac{2}{3}$.

2. Seconde méthode : étude des points critiques.

- a. La fonction f est polynomiale en ses deux variables donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x + y - 1) = 0 + 2(x - 3y) = 0 \\ 2(2x + y - 1) - 6(x - 3y) + 2(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 2y = 4 \\ -2x + 22y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{9} \\ y = \frac{2}{9} \end{cases}.$$

On en déduit que f admet pour unique pour critique le point $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$.

- c. Remarquons que $f(x_0, y_0) = \frac{2}{3}$. Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= \left(2h + k + \frac{1}{9}\right)^2 + \left(h - 3k - \frac{2}{9}\right)^2 + \left(k - \frac{7}{9}\right)^2 - \frac{2}{3} \\ &= 5h^2 + 11k^2 - 2hk \\ &= (h - k)^2 + 4h^2 + 10k^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que f admet un minimum, atteint en (x_0, y_0) , égal à $f(x_0, y_0) = \frac{2}{3}$.