Exercice 1

1. cf. TP sur les tris.
2. On construit une liste, initialement vide, des éléments déjà vus. Lorsqu'on lit un élément de la liste, on vérifie qu'il n'est pas déjà dans la liste des éléments déjà vus. Lorsque le parcours de la liste est terminé sans avoir renvoyé `True`, c'est qu'on n'a jamais rencontré un élément se répétant ; on renvoie donc `False`.

```
def repetition(L):
    deja_vus = []
    for x in L:
        if x in deja_vus:
            return True
        else:
            deja_vus.append(x)
    return False
```

Exercice 2

1. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^2}\right)$ est continue sur $[0,+\infty[$ par théorèmes opératoires.

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge. En effet, pour $A>0$, on a :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \big[\arctan(t)\big]_0^A = \arctan(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Par comparaison de fonctions positives, $\underline{\text{l'intégrale } I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \text{ converge.}}$

2. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. En posant $x = \dfrac{1}{t}$, on a $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$. De plus, $\lim\limits_{0^+} \varphi = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$. Le théorème de changement de variable assure alors que :

$$I = \int_{+\infty}^0 -\frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

La convergence de la seconde intégrale est garantie par le théorème de changement de variable.

3. D'après la question précédente, on a (par linéarité et d'après les calculs faits en 1) :

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi : $\boxed{I = \dfrac{\pi}{4}.}$

Exercice 3 (Agro-Véto MCR 2018)

I. Matrice de transition

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $X_n(\Omega) = [\![0,2]\!]$, la famille $([X_n = k])_{0\leqslant k\leqslant 2}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1}=0)$$

Or, d'après la description de l'expérience, on a :

$$\mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0) = 0,\ \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1}=0) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1}=0) = 0.$$

On en déduit ainsi que $\mathbb{P}(X_{n+1}=0) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1)$. Par le même argument, on trouve que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \mathbb{P}(X_n=0) + \mathbb{P}(X_n=2) \text{ et } \mathbb{P}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1).$$

On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1}=0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}(X_n=2) \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n=0) \\ \mathbb{P}(X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_n=2) \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = A_2 Y_n.}$

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-\lambda & 1/2 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2 & -\lambda\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2 & -\lambda\\ -\lambda & 1/2 & 0\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -2\lambda\\ 0 & 1/2-\lambda^2 & \lambda\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -2\lambda\\ 0 & 0 & Q(\lambda)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

où $Q(\lambda) = \lambda + 2\lambda\left(\frac{1}{2}-\lambda^2\right) = \lambda\left(2-2\lambda^2\right) = -2\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$.
Ainsi : $\lambda \in \operatorname{Sp}(A_2) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A_2-\lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1;0;1\}$.
On en déduit que $A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes. A_2 est donc diagonalisable.
On trouve rapidement que :

- $\dim \operatorname{Ker}(A_2+I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$
- $\dim \operatorname{Ker}(A_2) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$
- $\dim \operatorname{Ker}(A_2-I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.

On en déduit que $A_2 = PDP^{-1}$ où :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0, N]\!]$.
Puisque $X_n(\Omega) = [\![0, N]\!]$, la famille $([X_n = k])_{0\leqslant k\leqslant N}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=i) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n=k)\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1}=i)$$

Or, toujours d'après la description de l'expérience et par équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1}=i) = \begin{cases}\dfrac{k}{N} & \text{si } i=k-1 \text{ et } k\geqslant 1\\ \dfrac{N-k}{N} & \text{si } i=k+1 \text{ et } k\leqslant N-1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On obtient alors le résultat attendu de la même manière qu'à la question 1.a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = AY_n.}$$

3. Lorsque $N=2$, $A=A_2$. Soit $X = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}X \in \operatorname{Ker}(A^T-I_3) &\Leftrightarrow A_2^T X = X\\ &\Leftrightarrow 2A_2^T X = 2X\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}2y=2x\\ x+z=2y\\ 2y=2z\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x=y=z.\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\operatorname{Ker}(A^T-I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).}$

Lorsque $N=3$, on a :

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1/3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2/3 & 0\\ 0 & 2/3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\end{pmatrix} \text{ et } A^T = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0\\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Soit $X = \begin{pmatrix}x & y & z & t\end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \operatorname{Ker}(A^T-I_4) \Leftrightarrow A^T X = X \Leftrightarrow \begin{cases}3y=3x\\ x+2z=3y\\ 2y+t=3z\\ 3z=3t\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t$$

On en déduit que $\boxed{\operatorname{Ker}(A^T-I_4) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right).}$

4. Remarquons que la somme des coefficients de chaque colonne de A vaut 1. Ainsi la somme des coefficients de chaque ligne de A^T vaut 1.

   On en déduit que le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ vérifie $AX = X$.

   Puisqu'il est non nul, c'est un vecteur propre de A^T, associé à la valeur propre 1.

5. Puisque 1 est valeur propre de A^T, alors la matrice $A^T - I_3$ n'est pas inversible. Or $(A - I_{N+1})^T = A^T - I_3$. La matrice $(A - I_{N+1})^T$ n'est donc pas inversible. On en déduit que sa transposée, la matrice $A - I_{N+1}$, est aussi non inversible, impliquant ainsi que 1 est valeur propre de A.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire $\mathbf{X_n}$

1. À chaque tour, on ne peut retirer ou ajouter une seule boule à l'urne U_1. Les seules valeurs que peut prendre la variable $X_{n+1} - X_n$ sont 1 et -1.
2. On commence par remarquer que les variables aléatoires X_n et $X_{n+1} - X_n$ sont finies donc admettent chacune une espérance.

   En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = k])_{k \in [\![0,N]\!]}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} - X_n = -1) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N}\mathbb{P}(X_n = k) \quad (\text{car } \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = -1) = 0) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \frac{1}{N}\mathbb{E}(X_n).
\end{aligned}$$

   D'après la question précédente, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) = 1 - \frac{1}{N}\mathbb{E}(X_n).$$

   Ainsi, par définition de l'espérance de $X_{n+1} - X_n$, on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) = 1 - \frac{2}{N}\mathbb{E}(X_n).}$$

3. D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{N-2}{N}\mathbb{E}(X_n) + 1.$$

   La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique. Posons, pour tout entier naturel n, $u_n = \mathbb{E}(X_n) - \frac{N}{2}$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{N-2}{N}$ et de premier terme $u_0 = \mathbb{E}(X_0) - \frac{N}{2}$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{N-2}{N}\right)^n \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{N}{2}\right).$$

   Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_n) = \frac{N}{2} + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{N}{2}\right).}$$

4. Puisque $-1 < \frac{N-2}{N} < 1$, il vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{N-2}{N}\right)^n = 0$ et ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{N}{2}.}$$

   On en déduit qu'après un grand nombre de tours, les urnes U_1 et U_2 contiendront en moyenne autant de boules.

III. Étude de la probabilité stationnaire

1. Montrons le résultat par récurrence double sur $k \in [\![0,n]\!]$.

   Puisque $\binom{N}{0}x_0 = x_0$, le résultat est vrai pour $k = 0$. En lisant la première ligne du système $AX = X$, on obtient $\frac{1}{N}x_1 = x_0$, i.e. $x_1 = Nx_0 = \binom{N}{1}x_0$. Le résultat est donc vrai pour $k = 1$.

   Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Supposons que $x_{k-2} = \binom{N}{k-2}x_0$ et $x_{k-1} = \binom{N}{k-1}x_0$.

   La lecture de la k-ème ligne de système $AX = X$ fournit l'égalité suivante

$$\frac{N-k+2}{N}x_{k-2} + \frac{k}{N}x_k = x_{k-1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
x_k &= \frac{1}{k}x_{k-1} - \frac{N+2-k}{k}x_{k-2} \\
&= \frac{1}{k}\binom{N}{k-1}x_0 - \frac{N+2-k}{k}\binom{N}{k-2}x_0 \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \left(\frac{N!}{k!(N+1-k)!} - \frac{N!}{k(k-2)!(N-k+1)!}\right)x_0 \\
&= \left(\frac{kN!}{k!(N-k)!} - \frac{(k-1)N!}{k!(N-k)!}\right)x_0 \\
&= \binom{n}{k}x_0,
\end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, N]\!],\ x_k = \binom{N}{k}x_0.}$$

2. On sait que 1 est valeur propre de A donc $\dim E_1 \geqslant 1$.
D'après la question précédente, $E_1 \subset \text{Vect}(u)$, où :

$$u = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\boxed{\dim E_1 = 1.}$

3. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\boxed{S = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}1^k 1^{N-k} = 2^N.}$$

4. Soit $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$. D'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{N}\pi_k = \pi_0\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} = 2^N\pi_0.$$

Il existe donc un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\pi_k = 1$, il s'agit du vecteur vérifiant

$$\boxed{\forall k \in [\![0, N]\!],\ \pi_k = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}.}$$

5. Puisque :

$$\forall k \in [\![0, N]\!],\ \mathbb{P}(X_\infty = k) = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k} = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}.$$

La variable X_∞ suit donc la loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{2}$ et :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_\infty) = \frac{N}{2} \text{ et } V(X_\infty) = \frac{N}{4}.}$$

6. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi binomiale de paramètre N et $\frac{1}{2}$.
Le résultat est vrai pour $n = 0$ par hypothèse.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que X_n suit la loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{2}$. Cela signifie que $Y_n = \pi$. Puisque $\pi \in E_1$, $Y_{n+1} = AY_n = A\pi = \pi$ (le vecteur π est vecteur propre associé à la valeur propre 1). Ainsi X_{n+1} suit la loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{2}$, ce qui conclut la récurrence.
Si X_0 suit la loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{2}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable X_n suit la loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{2}$.
Si le nombre initial de boules dans l'urne 1 suit la loi stationnaire $\left(\text{la loi binomiale de paramètres } N \text{ et } \frac{1}{2}\right)$, le nombre de boules dans l'urne 1 suivra encore cette loi à chaque tour.

Exercice 4 (Oraux Agro-Véto 2021)

1. a. La fonction G est dérivable sur $]0, 1[$ par théorèmes opératoires et :

$$\forall x \in]0, 1[,\ G'(x) = \ln x + \frac{x}{x} - \ln(1-x) - \frac{1-x}{1-x} = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = g(x).$$

La fonction G est donc bien une primitive de g sur $]0, 1[$.

b. Soit $\lambda > 0$. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = e^{-\lambda x}.$$

Remarquons que $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$ par croissances comparées. Par intégration par parties, l'intégrale à étudier est de même nature que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$. Soit $A > 0$.

$$\int_0^A -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]_0^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{\lambda^2}.$$

Puisque l'intégrale I converge, l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^2}.}$$

2. La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Soit $A \in]-\infty, 0]$ et $B \in [0,+\infty[$.

$$\int_A^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]_A^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{-A}} \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$
$$\int_0^B f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]_0^B = \frac{1}{1+e^{-B}} - \frac{1}{2} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1, et ainsi que <u>f est une densité de probabilité</u>.

3. Pour tout réel x, on a :

$$\mathbb{P}\left(\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{U}{1-U} \leqslant e^x\right) = \mathbb{P}\left(U \leqslant \frac{e^x}{1+e^x}\right) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

puisque $\frac{e^x}{1+e^x} \in]0,1[$. La fonction de répartition de $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par théorème opératoires ; $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ est donc à densité, de densité donnée par la fonction

$$g : x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = f(x).$$

<u>Les variables aléatoires $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ et X suivent donc la même loi.</u>

4.

```python
import numpy as np
import random as rd

def simule_X():
    u = rd.random()
    return np.log(u/(1-u))
```

5. D'après le théorème du transfert, étudier l'existence de $\mathbb{E}(X)$ revient à étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \left|\ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\right|\mathrm{d}u.$$

Remarquons que pour tout $u \in]0,1[$, on a :

$$\ln\left(\frac{u}{1-u}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{u}{1-u} \geqslant 1 \Leftrightarrow u \geqslant 1-u \Leftrightarrow u \geqslant \frac{1}{2}.$$

Remarquons que la fonction $t \mapsto \left|\ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\right|$ est continue sur $]0,1[$. Soit $A \in]0,1[$.

$$\int_A^{\frac{1}{2}} \left|\ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\right|\mathrm{d}u = -\int_A^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\mathrm{d}u = -\Big[u\ln u + (1-u)\ln(1-u)\Big]_A^{\frac{1}{2}} \underset{A\to 0}{\longrightarrow} \ln 2$$
$$\int_{\frac{1}{2}}^B \left|\ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\right|\mathrm{d}u = \int_{\frac{1}{2}}^B \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\mathrm{d}u = \Big[u\ln u + (1-u)\ln(1-u)\Big]_{\frac{1}{2}}^B \underset{B\to 0}{\longrightarrow} \ln 2.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\mathrm{d}u$ converge absolument, assurant l'existence de l'espérance de X. D'après les calculs précédents,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\mathrm{d}u + \int_{\frac{1}{2}} 1 \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\mathrm{d}u = -\ln 2 + \ln 2 = 0.}$$

6. a. Pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} \leqslant xe^{-x}$. De plus, la fonction $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge d'après la question 1.b (ou en tant qu'espérance de la loi exponentielle de paramètre 1). Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

b. Les fonction $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u'(x) = 2x \text{ et } v'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

Puisque $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$ (par croissances comparées), on trouve par intégration par parties que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{2xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x}$$

(la convergence de la seconde intégrale étant assurée par le théorème d'intégration par parties).

c. D'après le théorème du transfert, étudier l'existence de $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ revient à étudier l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^2 \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} \right| \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or l'intégrande est ici paire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (-x)^2 \frac{e^{-(-x)}}{\left(1+e^{-(-x)}\right)^2} = x^2 \frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^2} = x^2 \frac{e^{x}}{e^{2x}\left(e^{-x}+1\right)^2} = x^2 \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}.$$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$ converge, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$ converge par parité, assurant l'existence de $\mathbb{E}(X^2)$, et :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Puisque X admet un moment d'ordre 2, X admet une variance, donnée par la formule de König-Huygens :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = 4\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.}$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Toutes les intégrales de la somme ci-dessous convergent d'après la question 1.b.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} xe^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(-e^{-x}\right)^k\right)\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\
&= \int_0^{+\infty} xe^{-x}\frac{1-\left(-e^{-x}\right)^{n+1}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \quad (\forall x \geqslant 0, -e^{-x} \neq 1) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x - (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

La convergence de la dernière intégrale est assurée par linéarité : toutes les autres intégrales convergent. On a donc bien :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x + I_n.}$$

e. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\dfrac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}} \leqslant xe^{-(n+2)x}$. Par croissance de l'intégrale (la convergence des deux intégrales a déjà été prouvée) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} xe^{-(n+2)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+2)^2}$$

On en déduit que $|I_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+2)^2}$ (par positivité de l'intégrale) puis que I_n tend vers 0 par théorème d'encadrement. Par passage à la limite de la relation 6.d, on trouve que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.}$$

Remarque : cela prouve dans le même temps la convergence de la série ci-dessus (même si on le savait déjà car elle converge absolument en temps que série de référence).

f. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} &= -\sum_{k=1}^{2N} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= -\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2N} \frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2N} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= -\sum_{p=1}^{N} \frac{(-1)^{2p}}{(2p)^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2N} \frac{1}{k^2} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2N} \frac{1}{k^2} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2N} \frac{1}{k^2} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\mathbb{V}(X) = 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}.}$

* *
*