Questions de cours

1. Énoncer la caractérisation des variables aléatoires à densité.
2. Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.
3. Donner la définition d'une valeur propre d'un endomorphisme.

Exercice 1

1. Proposer en Python un algorithme de tri de votre choix (*je vous jugerai si fort si vous ne choisissez pas le tri rapide ou le tri fusion*). Expliquez le en quelques phrases.
2. Écrire une fonction `repetition` en Python qui prend en argument une liste et qui devra renvoyer `True` si l'un de ses éléments est répété, i.e. s'il apparait plus d'une fois, et `False` dans le cas contraire.

Exercice 2

1. Sans calculer sa valeur, montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$ converge.
2. À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que $I = \dfrac{\pi}{4}$. *On pourra calculer* $2I$.

Exercice 3 (Agro-Véto MCR 2018)

On se propose d'étudier le modèle de diffusion d'Ehrenfest. On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux N boules avec $N \in \mathbb{N}^*$. À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'étape n. La variable aléatoire X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1, la variable aléatoire X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange, etc.
Par exemple, si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2, alors $N = 5$ et $X_0 = 3$. On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 2, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et l'on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 3, alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et l'on a $X_2 = 3$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. à l'issue de l'échange, on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de $\frac{3}{5}$ et $X_3 = 4$ avec une probabilité de $\frac{2}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$.

I. Matrice de transition

1. On suppose ici que $N = 2$.

   a. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = A_2 Y_n$, où $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. *Une récurrence n'est pas nécessaire.*

   b. La matrice A_2 est-elle diagonalisable ? Écrire une relation de diagonalisation le cas échéant.

2. Dans toute la suite, N est un entier naturel non nul fixé. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{N} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{N-1}{N} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \frac{2}{N} & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}).$$

3. Déterminer, lorsque $N = 2$ et $N = 3$ l'espace propre de A^T associé à la valeur propre 1.
4. Justifier dans le cas général que 1 est valeur propre de A^T.
5. En déduire que la matrice $(A - I_{N+1})^T$ est non inversible puis que 1 est valeur propre de A.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire $\mathbf{X_n}$

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable $X_{n+1} - X_n$?
2. En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \dfrac{2}{N}\mathbb{E}(X_n)$.
   On pourra utiliser le système complet d'événements $([X_n = k])_{k \in [\![0,N]\!]}$ *pour calculer* $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1)$.
3. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et $\mathbb{E}(X_0)$.
4. On suppose que $N > 2$. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation.

III. Étude de la probabilité stationnaire

On s'intéresse dans cette question à l'espace propre de A associé à la valeur propre 1, que l'on notera E_1.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $x_k = \dbinom{N}{k} x_0$.
2. En déduire la dimension de E_1.
3. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$.
4. Déterminer l'un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$.
5. On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :

$$X_\infty(\Omega) = [\![0, N]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0, N]\!],\ \mathbb{P}(X_\infty = k) = \pi_k.$$

   Quelle est la loi de X_∞ ? Donner son espérance et sa variance.
6. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞.
   Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.

Exercice 4 (Oraux Agro-Véto 2021)

1. Questions préliminaires (indépendantes).

   a. Vérifier que $G : x \mapsto x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ sur $]0,1[$.

   b. Montrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^2}$.

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$. Montrer que f est une densité.

   Par la suite, on note X une variable aléatoire de densité f. On dit que X suit la **loi logistique**.

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$ suit la même loi que X.

4. En déduire une fonction en Python permettant de simuler X.

5. À l'aide du théorème du transfert et de la question 1.a, montrer que X admet une espérance égale à 0.

6. a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ converge.

   b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x$.

   c. En déduire que $\displaystyle\mathbb{V}(X) = 4\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$. *On pourra utiliser un argument de parité.*

   d. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x + I_n \text{ où } I_n = (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

   e. Montrer que l'intégrale I_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire l'égalité :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

   f. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire que la variance de X est égale à $\dfrac{\pi^2}{3}$.

* *

*