

Exercice 1 (extrait d'Agro-Véto 2025)**1. Quelques résultats autour de la loi exponentielle.**

On se donne un entier naturel $n > 0$, un réel strictement positif λ et une famille de n variables aléatoires notées $X_1, \dots, X_n$, indépendantes et identiquement distribuées selon la loi exponentielle de paramètre λ . On définit $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

- a. Soit $\mu > 0$. Justifier sans calcul que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-\mu x} dx$ converge et donner sa valeur.
- b. Calculer $\mathbb{P}(X_{(1)} > x)$ pour tout réel $x > 0$ et en déduire que la variable $X_{(1)}$ suit une loi qu'on identifiera.
- c. Prouver que $X_{(n)}$ est une variable aléatoire de densité : $x \mapsto n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
- d. En déduire que :

$$\mathbb{E}(X_{(n)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

2. Loi de Gumbel.

On reprend les notations de la partie précédente et on rappelle que la variable X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ . On considère la fonction $f : x \mapsto \lambda e^{-x} \exp(-\lambda e^{-x})$.

- a. Justifier que la fonction f est bien une densité de probabilité. On appellera cette loi la loi de Gumbel de paramètre λ . *Indication : on pourra utiliser le changement de variable $y = e^{-x}$.*
- b. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln X_1$ suit la loi de Gumbel.

Exercice 2 extrait de G2E 2019

1. Soit N_1 une variable aléatoire réelle suivant la loi normale de paramètres 0 et σ^2 . On note M la variable aléatoire réelle définie par

$$M = N_1^2.$$

- a. En notant F_{N_1} la fonction de répartition de N_1 , démontrer que M est une variable aléatoire réelle à densité dont la fonction de répartition est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ F_{N_1}(\sqrt{x}) - F_{N_1}(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- b. En déduire une densité de M .

2. À l'aide du changement de variable $t = \frac{\lambda}{2}(1 + \sin \theta)$ et en vérifiant avec soin les hypothèses du théorème utilisé, démontrer que

$$\forall \lambda > 0, \quad \int_0^\lambda \frac{dt}{\sqrt{t(\lambda - t)}} = \pi.$$

3. Soit N_2 une variable aléatoire réelle de même loi que N_1 et indépendante de cette dernière. On note S et Z les variables aléatoires réelles définies par $S = M + N_2^2$ et $Z = \sqrt{S}$.

- a. Démontrer que S est une variable aléatoire réelle à densité dont une densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- b. En déduire que Z est une variable aléatoire à densité dont on déterminera une densité.

* *
*