

Exercice 1 (extrait d'Agro-Véto 2025)

1. a. On sait que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mu x e^{-\mu x} dx$$

converge et vaut $\frac{1}{\mu}$ en tant qu'espérance de la loi exponentielle de paramètre μ .

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-\mu x} dx$ converge et vaut $\frac{1}{\mu^2}$.

- b. Soit
- $x > 0$
- .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{(1)} > x) &= \mathbb{P}([X_1 > x] \cap \dots \cap [X_n > x]) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x) \dots \mathbb{P}(X_n > x) \text{ par indépendance de } X_1, \dots, X_n \\ &= [1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x)] \dots [1 - \mathbb{P}(X_n \leq x)] \\ &= e^{-n\lambda x}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(X_{(1)} \leq x) = 1 - e^{-n\lambda x}$. Puisque $X_{(1)}$ est à valeurs positives, on obtient immédiatement sa fonction de répartition :

$$x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-n\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi usuelle : $X_{(1)}$ suit la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

- c. Puisque
- $X_{(n)}$
- est une variable aléatoire à valeurs positive, sa fonction de répartition est nulle sur
- $\mathbb{R}_-^*$
- . Soit
- $x \geq 0$
- .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{(n)} \leq x) &= \mathbb{P}([X_1 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \dots \mathbb{P}(X_n \leq x) \text{ par indépendance de } X_1, \dots, X_n \\ &= (1 - e^{-\lambda x})^n. \end{aligned}$$

On montre sans difficulté que la fonction de répartition de $X_{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, assurant que $X_{(n)}$ est une variable à densité, de densité donnée par la fonction :

$$x \mapsto n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

- d. La densité précédente étant nulle sur
- $\mathbb{R}_-^*$
- ,
- $X_{(n)}$
- admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} |xn\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1}| dx = \int_0^{+\infty} xn\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx.$$

Or :

$$\forall x \geq 0, 0 \leq xn\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \leq nxe^{-\lambda x}.$$

Puisque l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} xn\lambda e^{-\lambda x} dx$$

converge d'après la question 1.a, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} |xn\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1}| dx$$

converge par comparaison de fonctions positives. On en déduit que $X_{(n)}$ admet une espérance, égale à :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{(n)}) &= \int_0^{+\infty} xn\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left[n\lambda x e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k e^{-k\lambda x} \right] dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left[n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k x e^{-(k+1)\lambda x} \right] dx \\ &= n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k \int_0^{+\infty} x e^{-(k+1)\lambda x} dx, \end{aligned}$$

la dernière ligne étant assurée par linéarité et par la convergence de toutes les intégrales ci-dessus (grâce à la question 1.a). Ainsi, toujours grâce à la question 1.a, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{(n)}) &= n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2 \lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(-1)^k}{k+1}. \end{aligned}$$

2. a. La fonction f est bien continue et positive sur $\mathbb{R}$. La fonction $\varphi : x \mapsto e^{-x}$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{-\infty} \varphi = +\infty$ et $\lim_{+\infty} \varphi = 0$. En posant $y = e^{-x}$, on a $dy = -e^{-x} dx$. D'après le théorème de changement de variable, l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ est de même nature que

$$\int_{+\infty}^0 -\lambda e^{-\lambda y} dy$$

qui converge : on intègre une densité de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ sur son support.

On en déduit que f est bien une densité de probabilité.

- b. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(-\ln X_1 \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \geq e^{-y}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 < e^{-y}) \\ &= e^{-\lambda e^{-y}} \text{ car } e^{-y} > 0 \end{aligned}$$

La fonction de répartition F de Y étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, Y est à densité, de densité donnée par la fonction $F' = f$. On en déduit que la variable aléatoire $Y = -\ln X_1$ suit la loi de Gumbel.

Exercice 2 extrait de G2E 2019

1. a. Si $x < 0$, alors $F_M(x) = \mathbb{P}(M \leq x) = \mathbb{P}(N_1^2 \leq x) = 0$.
Si $x > 0$, $\mathbb{P}(N_1^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq N_1 \leq \sqrt{x}) = F_{N_1}(\sqrt{x}) - F_{N_1}(-\sqrt{x})$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ F_{N_1}(\sqrt{x}) - F_{N_1}(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Remarquons que F_M est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque la fonction $f_{N_1} : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est une densité continue de N_1 , la fonction de répartition F_{N_1} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par théorèmes opératoires, la fonction F_M est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étudions la continuité de F_M en 0. On a évidemment $F_M(0) = 0$, $\lim_{0^-} F_M = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$ et $\lim_{0^+} F_M = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_{N_1}(\sqrt{x}) - F_{N_1}(-\sqrt{x}) = 0$ par continuité de F_{N_1} en 0. La fonction F_M est donc continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. La variable aléatoire M est donc à densité.

- b. Après calculs, on trouve qu'une densité de M est donnée par la fonction :

$$f_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

2. Soit $\lambda > 0$. La fonction $\varphi : \theta \mapsto \frac{\lambda}{2}(1 + \sin \theta)$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $\varphi(-\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \lambda$. En posant $t = \frac{\lambda}{2}(1 + \sin \theta)$, on a $dt = \frac{\lambda}{2} \cos \theta d\theta$. De plus,

$$t(\lambda - t) = \frac{\lambda^2}{4}(1 - \sin^2 \theta) = \frac{\lambda^2}{4} \cos^2 \theta.$$

Ainsi, le théorème de changement de variable assure que l'intégrale

$$I = \int_0^\lambda \frac{dt}{\sqrt{t(\lambda - t)}}$$

est de même nature que l'intégrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{\lambda}{2} \cos \theta d\theta}{\frac{\lambda}{2} |\cos \theta|} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta$$

qui converge en vaut π . On en déduit que l'intégrale I converge et :

$$\int_0^\lambda \frac{dt}{\sqrt{t(\lambda - t)}} = \pi.$$

3. a. Remarquons que N_2^2 suit la même loi que M . La variable aléatoire S est la somme de deux variables aléatoires indépendantes (d'après le lemme des coalitions) à densité. Elle admet donc une densité f_S donnée par le produit de convolution :

$$f_S : x \mapsto \int_0^x f_M(t) f_M(x - t) dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que :

$$f_M(t) f_M(x - t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ x - t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < x.$$

Si $x \leq 0$, alors $f_S(x) = 0$.

Si $x > 0$, alors :

$$f_S(x) = \int_0^x f_M(t)f_M(x-t) dt = \frac{e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}.$$

La fonction

$$f_S : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

est une densité de S .

On remarque que S suit une loi exponentielle : $S \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)$.

b. Notons F_S la fonction de répartition de S et F_Z celle de Z . Pour tout réel z ,

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(S \leq z^2) = F_S(z^2).$$

Puisque la fonction F_S est continue sur $\mathbb{R}$, F_Z l'est aussi par composition (avec la fonction carré, elle aussi continue sur $\mathbb{R}$).

Puisque la fonction F_S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, F_Z l'est aussi par composition (car $z^2 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$).

On en déduit que Z est une variable à densité, dont une densité est donnée par :

$$f_Z : z \mapsto 2zF'_S(z^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0, \\ \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & \text{si } z > 0, \end{cases}$$

* *

*