

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A .
2. Vérifier que $\frac{1}{3}$ est valeur propre de A et déterminer une base orthonormée du sous-espace propre de A associé.
3. En déduire une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P$ soit une matrice diagonale.
4. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$. *Indication : on pourra poser $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.*
5. Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}^3, \frac{1}{3}\|u\|^2 \leq \langle u | f(u) \rangle \leq \frac{4}{3}\|u\|^2$.

Exercice 2 - Somme de variables aléatoires au nombre aléatoire de termes

Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit N une variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes des variables précédentes.

On considère les variables aléatoires X et Y définies par :

$$X = \sum_{i=1}^N U_i \text{ et } Y = N - X.$$

1. Montrer que :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \binom{k + \ell}{k} p^k (1 - p)^\ell \mathbb{P}(N = k + \ell).$$

2. On suppose ici que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
 - a. Déterminer la loi de X et celle de Y .
 - b. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On suppose ici que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et que la variable aléatoire N n'est pas presque-sûrement nulle.

On pose, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_\ell = \mathbb{P}(Y = \ell)$.

- a. Justifier que, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $p_k > 0$ et $q_\ell > 0$.
- b. Vérifier que :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, (k + 1)(1 - p)p_{k+1}q_\ell = (\ell + 1)pp_kq_{\ell+1}.$$

- c. (i) En déduire une relation de récurrence sur les termes de la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
 (ii) Déterminer la loi de X .

Justifier rigoureusement que X suit une loi de Poisson dont on explicitera le paramètre.

- d. Déterminer la loi de Y .
- e. En déduire que N suit une loi de Poisson.

* *
*