

Questions de cours

1. Énoncer deux propriétés (l'une de régularité, l'autre calculatoire) de la fonction Φ de répartition de la loi normale centrée réduite.
2. Énoncer l'expression d'un vecteur dans une base orthonormée.
3. Énoncer le théorème d'existence du projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

Rappel : la méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant, de proche en proche, l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point :

en tout point a , $\varphi(a+h) \approx \varphi(a) + h\varphi'(a)$ lorsque h est petit.

On cherche l'unique solution y de l'équation différentielle $(E) : \forall t \in [0, \pi], y'(t) = \sin(y(t))$ vérifiant $y(0) = 1$.

En subdivisant l'intervalle $[0, \pi]$ en 1001 points équirépartis $(t_k)_{0 \leq k \leq 1000}$, on cherche à approcher les réels $y(t_k)$ par une suite finie $(y_k)_{0 \leq k \leq 1000}$ par la méthode d'Euler.

1. Préciser la valeur de y_0 puis exprimer, pour tout $k \in \llbracket 0, 999 \rrbracket$, y_{k+1} en fonction de y_k et d'un réel h à définir.
2. En déduire un script Python représentant la solution approchée par la méthode d'Euler.

Exercice 2

Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telle que $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = PDP^T$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Le but de cet exercice est de montrer que X admet des moments de tout ordre.

1. Rappeler sans justification la valeur de $\mathbb{E}(X^k)$ pour k appartenant à $\{0, 1, 2\}$.
2. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que X admet un moment d'ordre $k-2$.
Montrer que X admet un moment d'ordre k et $\mathbb{E}(X^k) = (k-1)\mathbb{E}(X^{k-2})$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^{2n} admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^{2n+1} admet une espérance qu'on déterminera.
5. Conclure.

Exercice 4

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction $\ell_{\alpha,r}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\ell_{\alpha,r}(t) = \begin{cases} \alpha \frac{t^{\alpha-1}}{r^\alpha} & \text{si } t \in]0, r[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $\ell_{\alpha,r}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\alpha > 0$.
Dans toute la suite de ce problème, on supposera cette condition réalisée.
2. On considère une variable aléatoire X admettant $\ell_{\alpha,r}$ pour densité. On note $\mathcal{L}(\alpha, r)$ la loi de X .
 - a. Déterminer la fonction de répartition F de X .
 - b. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $W = -\ln\left(\frac{X}{r}\right)$.

3. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant les lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ .
- Montrer que la variable aléatoire $-U_2$ est à densité et déterminer une densité.
 - Montrer que $U_1 - U_2$ est une variable à densité, de densité donnée par :

$$g_{\lambda,\mu} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{\mu t} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

- Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant respectivement les lois $\mathcal{L}(\alpha, r)$ et $\mathcal{L}(\beta, s)$, avec $(\alpha, \beta, r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$. À l'aide de ce qui précède, donner la loi de $Z = -\ln\left(\frac{sX}{rY}\right)$. En déduire :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{s}{r}\right)^\alpha & \text{si } s < r \\ 1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{r}{s}\right)^\beta & \text{si } r \leq s. \end{cases}$$

Exercice 5 (G2E 2017)

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. On s'intéresse aux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la relation (E) : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x | f(x) \rangle \geq 0$.

1. Étude d'un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer $\text{Ker } f$ et en donner une base, puis démontrer que : $\forall u \in \mathbb{R}^3, f(u) - u \in \text{Ker } f$.
 - Montrer que $\text{Im } f$ est un plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + z = 0$. Donner un vecteur normal à ce plan.
 - En déduire que f est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ à expliciter.
- Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

- Calculer la distance du vecteur x au plan $\mathcal{P}$. En déduire que :

$$\frac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

- En déduire que :

$$-4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \leq 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2.$$

- Calculer $\langle x | f(x) \rangle$. Conclure.

2. Étude d'un exemple dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A . On note enfin f^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A^T .

- Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle f(x) | x \rangle = \langle x | f^*(x) \rangle$.
 - En déduire que f vérifie (E) si, et seulement si $f + f^*$ vérifie (E).
 - Justifier qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1} = Q^T$, vérifiant $A + A^T = QDQ^{-1}$.
 - En déduire que f vérifie (E) si, et seulement si $\text{Sp}(f + f^*) \subset \mathbb{R}^+$.

b. Dorénavant, A et B désignent les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (i) À l'aide d'une des questions précédentes, montrer que f vérifie (E) si, et seulement si l'endomorphisme g canoniquement associé à B vérifie (E).
- (ii) Justifier que g n'est pas diagonalisable.
- (iii) Montrer que 1 est valeur propre de A et donner la dimension de l'espace propre associé. Montrer que A admet une seule autre valeur propre : $n + 1$. Que peut-on en conclure sur f ?

3. Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1.

a. Démontrer que la matrice

$$\left(\mathbb{E}(X_i X_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

i.e. la matrice dont le coefficient à la i -ème ligne et la j -ème colonne est $\mathbb{E}(X_i X_j)$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, est la matrice A définie en 2.b.

b. Démontrer que :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \langle x \mid f(x) \rangle = \mathbb{E} \left(\left(\sum_{k=1}^n x_k X_k \right)^2 \right).$$

c. Retrouver que f vérifie (E).

* *

*