

Exercice 1

```
def produit_scalaire(u,v):
    ps = 0
    for k in range(len(u)):
        ps += u[k]*v[k]
    return ps
```

Exercice 2

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(M - \lambda I_4) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-(2-\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9-(2-\lambda)^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow 3L_3 - (2-\lambda)L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - (2-\lambda)L_1 \end{matrix} \end{aligned}$$

Puisque $\lambda \in \operatorname{Sp}(f) \Leftrightarrow \lambda \in \operatorname{Sp}(M) \Leftrightarrow 9 - (2 - \lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow (5 - \lambda)(1 + \lambda) = 0$, 5 et -1 sont les deux seules valeurs propres de f .

2. Puisque M est symétrique réelle, M est diagonalisable via une matrice de passage orthogonale.

Déterminons les espaces propres de M . Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \operatorname{Ker}(f - 5\operatorname{Id})(M) \Leftrightarrow (M - 5I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3t = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = z \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\operatorname{Ker}(f - 5\operatorname{Id}) = \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Vect} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(On pourra vérifier que les deux dernières matrices colonnes engendrant $\operatorname{Ker}(f - 5\operatorname{Id})$ correspondent à des vecteurs orthogonaux et normés de $\mathbb{R}^4$).

$$X \in \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id})(M) \Leftrightarrow (M + I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3t = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -z \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\operatorname{Ker}(f - 5\operatorname{Id}) = \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Vect} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(On pourra vérifier que les deux dernières matrices colonnes engendrant $\operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id})$ correspondent à des vecteurs orthogonaux et normés de $\mathbb{R}^4$).

Ainsi $\underline{M = SDS^{-1}}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

S est une matrice orthogonale, i.e. vérifiant $S^T = S^{-1}$, car c'est la matrice de passage d'une base orthonormée (la base canonique de $\mathbb{R}^4$) vers une autre (une base orthonormée formée de vecteurs propres de f).

3. a. Soit $x \in F$. Puisque p est la projection orthogonale sur F , $p(x) = x$. En composant par q , on trouve :

$$\boxed{\forall x \in F, q(x) = q(p(x)).}$$

b. Puisque $p + q = \operatorname{Id}_E$, en appliquant p (à gauche), on obtient $p^2 + p \circ q = p$. Puisque p est une projection orthogonale, $p^2 = p$. On en déduit alors que $\underline{p \circ q = 0}$.

Par symétrie des rôles de p et q , on a $\underline{q \circ p = 0}$.

c. Soit $x \in F$. On sait que $p(x) = x$ et, d'après ce qui précède, $q(x) = q(p(x)) = 0_E$. Puisque $f = \lambda p + \mu q$, on trouve :

$$f(x) = \lambda p(x) + \mu q(x) = \lambda x + \mu q(p(x)) = \lambda x.$$

Puisque F est de dimension non nulle, il existe un vecteur non nul x de F tel que $f(x) = \lambda x$. Ainsi λ est valeur propre de f et tout vecteur non nul de F est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

On pouvait aussi écrire que F est inclus dans l'espace propre de f associé à la valeur propre λ .

d. Par symétrie des rôles de (p, λ) et (q, μ) , il vient que μ est valeur propre de f .

4. a. Puisque :

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $\lambda = 5$, $\mu = -1$ et :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $D = \lambda\tilde{P} + \mu\tilde{Q}$ et on vérifie sans difficulté que $\tilde{P} + \tilde{Q} = I_4$.

b. On sait que $M = SDS^T$. Ainsi :

$$M = S(\lambda\tilde{P} + \mu\tilde{Q})S^T = \lambda S\tilde{P}S^T + \mu S\tilde{Q}S^T.$$

Posons $P = S\tilde{P}S^T$ et $Q = S\tilde{Q}S^T$. Par construction $M = \lambda P + \mu Q$. De plus, on peut vérifier que $P + Q = I_4$:

$$P + Q = S\tilde{P}S^T + S\tilde{Q}S^T = S(\tilde{P} + \tilde{Q})S^T = SI_4S^{-1} = I_4.$$

Après calculs, on obtient :

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. (i) Puisque $P + Q = I_4$ et puisque P et Q sont les matrices de p et q dans la base canonique, on en déduit que $p + q = \text{Id}_E$.

(ii) Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de f de sorte que S soit la matrice de passage de la base canonique vers cette base. On sait que $\mathcal{B}$ est orthonormée par construction.

Par lecture des colonnes de P , on trouve que $\text{Im } p = \text{Ker}(f - 5\text{Id})$ (on pouvait aussi lire les colonnes de $\tilde{P}$). Par un raisonnement analogue, on trouve que $\text{Im } q = \text{Vect}(e_3, e_4) = \text{Ker}(f + \text{Id})$.

(iii) Si l'un des vecteurs x ou y est nul, x et y sont orthogonaux.

Sinon, x et y sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est symétrique réelle. On en déduit que x et y sont orthogonaux.

(iv) Notons $F = \text{Im } p$. Soit $x \in F$. Montrons que $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur F . Par définition de $p(x)$, $p(x) \in F$.

Montrons que $x - p(x)$ est orthogonal à tout vecteur de F .

Remarquons que $x - p(x) = (\text{Id}_E - p)(x) = q(x) \in \text{Im } q = \text{Ker}(f + \text{Id})$. D'après la question précédente, $x - p(x)$ est orthogonal à tout vecteur de $F = \text{Im } p = \text{Ker}(f - 5\text{Id})$.

Par unicité du projeté orthogonal de x sur F , on en déduit que $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F .

On en déduit que p est la projection orthogonale sur $F = \text{Ker}(f - 5\text{Id})$ et, par symétrie des rôles des endomorphismes p et q , que q est la projection orthogonale sur $\text{Ker}(f + \text{Id})$.

Exercice 3

1. a. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Remarquons que D_i est le rang du premier succès ("pêcher un i -ème poisson marqué supplémentaire") lors de la répétition d'expériences indépendantes de Bernoulli de probabilité de succès $\frac{m}{N}$. La variable aléatoire D_i suit donc la loi géométrique de paramètre $\frac{m}{N}$.

$$\text{On sait que } \mathbb{E}(D_i) = \frac{N}{m} \text{ et } \mathbb{V}(D_i) = \frac{\frac{N-m}{N}}{\left(\frac{m}{N}\right)^2} = \frac{N(N-m)}{m^2}.$$

b. On simule la loi géométrique précédente :

```
import random as rd

def geometrique(N,m):
    k = 1
    while rd.random() > m/N:
        k += 1
    return k
```

c. Remarquons que $X_2 = X_1 + X_2 - X_1 = D_1 + D_2$ et $X_3 = X_2 + X_3 - X_2 = D_1 + D_2 + D_3$. On généralise sans peine cette relation en reconnaissant une somme télescopique :

$$\sum_{i=2}^n D_i = \sum_{i=2}^n (X_i - X_{i-1}) = X_n - X_1 = X_n - D_1$$

Ainsi $X_n = \sum_{i=1}^n D_i$. Par linéarité de l'espérance, X_n admet une espérance, égale à

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(D_i) = \frac{n}{m} N.$$

Puisque les variables aléatoires $D_1, \dots, D_n$ sont supposées indépendantes, X_n admet une variance, égale à :

$$\mathbb{V}(X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(D_i) = \frac{nN(N-m)}{m^2}.$$

- d. On utilise la loi faible des grands nombres : on calcule la moyenne empirique de 1000 valeurs de T_n .

```
def approx_esp_T(N,m,n):
    essais = 1000
    somme = 0
    for k in range(essais):
        Xn = 0
        for i in range(n):
            Xn += geometrique(N,m)
        Tn = m*Xn/n
        somme += Tn
    return somme/essais
```

- e. La variable aléatoire T_n s'écrit en fonction de $X_1, \dots, X_n$ et a pour espérance :

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{m}{n} \mathbb{E}(X_n) = N;$$

- f. (i) Remarquons que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i = \frac{X_n}{n} = \frac{T_n}{m}$. La variable aléatoire $\frac{T_n}{m}$ est donc la moyenne empirique des variables aléatoires $D_1, \dots, D_n$. Puisque celles-ci sont indépendantes identiquement distribuées et admettent une espérance (égale à $\frac{N}{m}$ et une variance non nulle (égale à $\frac{N(N-m)}{m^2}$), on peut appliquer le théorème central limite : on peut approcher la loi de la variable aléatoire

$$\frac{\frac{T_n}{m} - \frac{N}{m}}{\frac{N(N-m)}{m^2\sqrt{n}}} = \frac{T_n - N}{\frac{N(N-m)}{m\sqrt{n}}} = \frac{T_n - N}{\sigma(T_n)}.$$

par la loi normale centrée réduite. Ainsi, en notant $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile de niveau $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{T_n - N}{\sigma(T_n)} \right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha.$$

Or :

$$\begin{aligned} \left[\left| \frac{T_n - N}{\sigma(T_n)} \right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] &= [-\sigma(T_n)z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq N - T_n \leq \sigma(T_n)z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \\ &= [T_n - \sigma(T_n)z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq N \leq T_n + \sigma(T_n)z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \end{aligned}$$

En choisissant $\alpha = 0,1$, on a $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$ et $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,64$ d'après l'énoncé. Puisque $\sigma(T_n) \leq 100$, l'intervalle $[T_n - 164, T_n + 164]$ est un intervalle de confiance asymptotique de N au niveau de confiance 90%.

- (ii) Notons x_n et t_n les valeurs respectives des réalisations de X_n et T_n de l'expérience. Avec les données de l'énoncé, on a $m = 200$, $n = 50$, $x_n = 450$. On obtient alors $t_n = 1800$. Un intervalle de confiance asymptotique de N au niveau de confiance 90% est donc $[1636, 1964]$.

2. a. La variable aléatoire Y_n correspond au nombre de succès ("pêcher un poisson marqué") lors de la répétition de n expériences indépendantes (car la pêche s'effectue avec remise) de Bernoulli de paramètre $\frac{m}{N}$. La variable Y_n suit donc la loi binomiale de paramètres n et $\frac{m}{N}$, elle admet donc pour espérance $\frac{nm}{N}$.

Par linéarité, la variable aléatoire U_n admet une espérance égale à $\frac{1}{N}$.

- b. On pourrait remarquer rien ne garantit que $\mathbb{E} \left(\frac{1}{U_n} \right) = \frac{1}{\mathbb{E}(U_n)}$ mais en réalité la variable aléatoire $\frac{nm}{Y_n}$ n'est pas bien définie : $\mathbb{P}(Y_n = 0) = \left(1 - \frac{m}{N}\right)^n \neq 0$.

- c. La variable aléatoire Y_n est finie donc V_n aussi, garantissant l'existence de son

espérance. D'après le théorème du transfert, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(V_n) &= \sum_{k=0}^n \frac{m(n+1)}{k+1} \mathbb{P}(Y_n = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{m(n+1)}{k+1} \binom{n}{k} \left(\frac{m}{N}\right)^k \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n-k} \\
 &= N \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \left(\frac{m}{N}\right)^{k+1} \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n-k} \\
 &= N \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \left(\frac{m}{N}\right)^i \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n+1-i} \\
 &= N \left(\left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \left(\frac{m}{N}\right)^i \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n+1-i} \right) - \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n+1} \right) \\
 &= N - N \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

d. Puisque $\left|1 - \frac{m}{N}\right| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(V_n) = N$. Ainsi, lorsqu'on pêche beaucoup de poissons, (i.e. lorsque n est grand), on peut estimer la valeur de N à l'aide de la valeur mesurée de V_n . C'est la loi (faible) des grands nombres qui l'assure.

Exercice 4

1. _____

```
import random as rd
```

```
def simuleS(n,N):
```

```
    s = 0
```

```
    nb_des = N
```

```
    for k in range(n):
```

```
        for i in range(nb_des):
```

```
            u = rd.randint(1,6)
```

```
            if u == 6:
```

```
                s += 1
```

```
                nb_des -= 1
```

```
    return s
```

2. Soit $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Sachant $[S_n = k]$, il reste $N - k$ dés n'ayant pas encore obtenu un "six". La variable aléatoire X_{n+1} est le nombre de succès lors de la répétition de $N - k$

expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$. Sachant $[S_n = k]$, la variable aléatoire X_{n+1} suit donc la loi binomiale de paramètre $N - k$ et $\frac{1}{6}$.

3. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

La variable aléatoire X_1 est le nombre de succès lors de la répétition de N expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre $p_1 = \frac{1}{6}$. La variable aléatoire $S_1 = X_1$ suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p_1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p_n)$ où $p_n \in [0, 1]$. Remarquons que $S_{n+1}(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$. Soit $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$. La famille $([S_n = k])_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 P(S_{n+1} = i) &= \sum_{k=0}^N P(S_n = k) P_{[S_n=k]}(S_{n+1} = i) \\
 &= \sum_{k=0}^N P(S_n = k) P_{[S_n=k]}(X_{n+1} = i - k) \\
 &= \sum_{k=0}^i \binom{N}{k} p_n^k (1 - p_n)^{N-k} \binom{N-k}{i-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{i-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-i} \\
 &= \binom{N}{i} \left(\frac{5}{6}(1 - p_n)\right)^{N-i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} p_n^k \left(\frac{1}{6}(1 - p_n)\right)^{i-k} \\
 &= \binom{N}{i} \left(\frac{5}{6}(1 - p_n)\right)^{N-i} \left(p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n)\right)^i \quad (\text{formule du binôme}) \\
 &= \binom{N}{i} \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}p_n\right)^i \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{6}p_n\right)^{N-i}
 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{6} + \frac{5}{6}p_n + \frac{5}{6} - \frac{5}{6}p_n = 1$, S_{n+1} suit la loi binomiale de paramètres N et p_{n+1} ,

où $p_{n+1} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}p_n$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p_n), \text{ où } \begin{cases} p_1 = \frac{1}{6} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}p_n. \end{cases}$$

4. La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. Cherchons un point fixe éventuel de la suite :

$$\ell = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\ell \Leftrightarrow \ell = 1.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \ell = p_n - 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = p_{n+1} - 1 = \frac{5}{6}p_n - \frac{5}{6} = \frac{5}{6}u_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = -\left(\frac{5}{6}\right)^n$. On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.}$$

5. a. Remarquons que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$[T = n] = \begin{cases} [S_1 = N] & \text{si } n = 1 \\ [S_n = N] \setminus [S_{n-1} = N] & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, P(T = n) &= \begin{cases} P(S_1 = N) & \text{si } n = 1 \\ P(S_n = N) - P(S_{n-1} = N) & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)^N & \text{si } n = 1 \\ \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T = n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N.}$$

b.

```
def simuleT(N):
    n = 0
    nb_des = N
    while nb_des > 0:
        for i in range(nb_des):
            u = rd.randint(1,6)
            if u == 6:
                nb_des -= 1
        n += 1
    return n
```

6. a. Remarquons que $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que toutes les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_N$ suit la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(U \leq n) &= \mathbb{P}(Y_1 \leq n, \dots, Y_N \leq n) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 \leq n) \mathbb{P}(Y_N \leq n) \text{ par indépendance de } Y_1, \dots, Y_N \\ &= (1 - \mathbb{P}(Y_1 > n))^N \\ &= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N. \end{aligned}$$

La dernière égalité étant obtenue car réaliser $[Y_1 > n]$ revient à ne pas avoir obtenu de “six” en n lancers indépendants. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \mathbb{P}(U = n) &= \mathbb{P}(U \leq n) - \mathbb{P}(U \leq n-1) \\ &= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N. \end{aligned}$$

En remarquant que cette relation est encore vraie pour $n = 1$, la loi de U est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(U = n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N.$$

b. On remarque T et U suivent la même loi. Mais en réinterprétant l’expérience, on peut remarquer que $T = U$. En effet, la variable aléatoire U correspond au maximum du nombre lancers de chaque dé pour obtenir “six”. Il s’agit donc du nombre de lancers nécessaires à l’obtention des N “six” (qui, par définition, est T).

* *
*