

Questions de cours

1. Énoncer le théorème central limite (version au choix).
2. Donner la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des loi de Poisson **puis démontrer** ce résultat.

Exercice 1

Écrire en Python une fonction `produit_scalaire` prenant en argument deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ représentés par deux listes de nombres de même longueur (on ne vérifiera pas ce point) et qui renvoie le produit scalaire de ces deux vecteurs.

Exercice 2

On considère l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe (et déterminer) des projections orthogonales p et q et des réels λ et μ tels que $f = \lambda p + \mu q$ et $p + q = \text{Id}_E$.

1. Déterminer le spectre de f .
2. Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice $S \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ telle que $M = SDS^T$ et $S^T = S^{-1}$.
3. Supposons ici qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^4$ **de dimension non nulle**, et deux projections orthogonales p et q sur F et G respectivement, et des réels λ et μ tels que $f = \lambda p + \mu q$ et $p + q = \text{Id}_E$.
 - a. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.
 - b. Montrer que pour tout $x \in F$, $q(x) = q(p(x))$.
 - c. Pour tout $x \in F$, calculer $f(x)$. Que peut-on en déduire ?
 - d. Montrer que μ est une valeur propre de f .
4.
 - a. Déterminer deux réels λ et μ et deux matrices $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tels que $D = \lambda \tilde{P} + \mu \tilde{Q}$ et $\tilde{P} + \tilde{Q} = I_4$.
 - b. En déduire deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $M = \lambda P + \mu Q$ et $P + Q = I_4$.
On donnera une expression explicite des matrices P et Q .
 - c. Soient p et q les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ dont P et Q sont respectivement les matrices dans la base canonique.
 - (i) Que peut-on dire de $p + q$?
 - (ii) Vérifier que $\text{Im } p$ et $\text{Im } q$ sont les espaces propres de f associés aux deux valeurs propres de f .
 - (iii) Soient $x \in \text{Im } p$ et $y \in \text{Im } q$. Montrer que x et y sont orthogonaux.
 - (iv) Montrer que p et q sont des projections orthogonales sur des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ à expliciter.

Exercice 3

On cherche à évaluer le nombre N de poissons dans un étang. On prélève dans l'étang un échantillon de m poissons ($m < N$) que l'on marque et que l'on remet dans l'étang. On propose deux méthodes différentes pour estimer N .

1. Première méthode

On prélève des poissons dans l'étang, au hasard et avec remise. Soit n un entier non nul inférieur ou égal à m . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i le nombre de poissons qu'il a été nécessaire de pêcher pour obtenir i poissons marqués. On pose $D_1 = X_1$ et, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $D_i = X_i - X_{i-1}$. On suppose les variables $D_1, \dots, D_n$ mutuellement indépendantes.

- a. Justifier que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, D_i suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

- b. Écrire en Python une fonction prenant en argument deux entiers N et m et simulant une réalisation de la variable aléatoire D_i .
- c. Exprimer X_n en fonction de $D_1, \dots, D_n$. En déduire l'espérance et la variance de X_n .
- d. Écrire en Python une fonction prenant en argument trois entiers N , m et n et renvoyant une approximation de l'espérance de T_n . On expliquera la méthode employée.
- e. Montrer que la variable aléatoire $T_n = \frac{m}{n} X_n$ admet une espérance égale à N .
- f. On suppose dans toute la suite que $\sigma(T_n) \leq 100$.
 - (i) Montrer que $[T_n - 164, T_n + 164]$ est un intervalle de confiance asymptotique de N au niveau de confiance supérieur ou égal à 90%. On donne $\Phi(1,64) = 0,95$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
 - (ii) On a marqué 200 poissons puis effectué 450 prélèvements pour obtenir 50 poissons marqués. En déduire un encadrement du nombre de poissons dans l'étang avec un risque d'erreur inférieur ou égal à 10%.

2. Deuxième méthode

On prélève successivement et avec remise n poissons. Soit Y_n le nombre de poissons marqués ainsi recueillis.

- a. Montrer que la variable aléatoire $U_n = \frac{1}{nm} Y_n$ admet une espérance égale à $\frac{1}{N}$.
- b. Pourquoi ne serait-il pas pertinent d'estimer le nombre de poissons à l'aide de la valeur mesurée de $\frac{1}{U_n}$?
- c. On pose $V_n = \frac{m(n+1)}{Y_n + 1}$. Montrer que $\mathbb{E}(V_n) = N - N \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n+1}$.
- d. Proposer une variable aléatoires construites à partir des mesures (on parle d'estimateur) dont l'espérance approchant N lorsqu'on pêche beaucoup de poissons. Quel résultat justifie cette estimation ?

Exercice 4

Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de "six" obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de "six" obtenus et on répète l'expérience, définissant ainsi une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. La variable $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ correspond alors au nombre de "six" obtenus après n lancers.

1. Écrire une fonction en Python simulant une réalisation de la variable aléatoire S_n .
2. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on a : $\forall j \in \llbracket 0, N - k \rrbracket, \mathbb{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1} = j) = \binom{N-k}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-j}$.
3. Montrer par récurrence que la variable aléatoire S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p_n)$ où p_n vérifie la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}p_n$.
4. Déterminer une expression explicite de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
5. On note T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires à l'obtention des N "six".
 - a. Exprimer l'événement $[T = 1]$ à l'aide de la variable S_1 et, pour tout entier $n \geq 2$, exprimer l'événement $[T = n]$ à l'aide de des variables aléatoires S_n et S_{n-1} . En déduire la loi de T .
 - b. Écrire une fonction en Python simulant une réalisation de la variable aléatoire T .
6. On numérote les dés de 1 à N et on note, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, Y_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers du dé numéroté i pour obtenir (le premier) 6.

- a. On note $U = \max(Y_1, \dots, Y_N)$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(U = n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N$.
- b. Comparer les variables aléatoires T et U .

* *

*