

Partie I. modèle d'évolution de Wright-Fisher**Étude d'un cas particulier.**

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales, appliquées avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{0 \leq i \leq 2}$, on trouve que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^2 \mathbb{P}(X_n = i) \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

On en déduit que :

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 1) \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) \\ \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} V_n.$$

2. On trouve après calcul que $\text{Sp}(M) = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ et :

$$\text{Ker}(M - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \text{Ker} \left(M - \frac{1}{2}I_3 \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On en déduit que M est diagonalisable (la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à 3) et $M = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$. Après calculs, on trouve que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On peut alors montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$. On en déduit alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2^n} \mathbb{P}(X_0 = 1)$ et :

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_0 = 2).$$

Puisque les variables aléatoires X_n sont finies, elles admettent une espérance et :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{P}(X_n = 1) + 2\mathbb{P}(X_n = 2) \\ &= \frac{1}{2^n} \mathbb{P}(X_0 = 1) + \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \mathbb{P}(X_0 = 1) + 2\mathbb{P}(X_0 = 2) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = 1) + 2\mathbb{P}(X_0 = 2) = \boxed{\mathbb{E}(X_0)}. \end{aligned}$$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n \in \{0; 2\}) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{2^n} \mathbb{P}(X_0 = 1)$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in \{0; 2\}) = 1.}$$

Cas général.

- 5 a. La somme S_i est l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2N, \frac{i}{2N}\right)$, i.e. $\boxed{S_i = i}$.
 b. Les variables aléatoires X_n sont finies (à valeurs dans $\llbracket 0, 2N \rrbracket$, elles admettent donc une espérance. En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet $([X_n = i])_{0 \leq i \leq 2N}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{2N} j \mathbb{P}(X_{n+1} = j) \\ &= \sum_{j=0}^{2N} j \sum_{i=0}^{2N} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \mathbb{P}(X_n = i) \\ &= \sum_{i=0}^{2N} \left[\sum_{j=0}^{2N} j \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N} \right)^j \left(1 - \frac{i}{2N} \right)^{2N-j} \right] \mathbb{P}(X_n = i) \\ &= \sum_{i=0}^{2N} S_i \mathbb{P}(X_n = i) \\ &= \sum_{i=0}^{2N} i \mathbb{P}(X_n = i) \\ &= \boxed{\mathbb{E}(X_n)}. \end{aligned}$$

c. La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante égale à $\mathbb{E}(X_0)$. On en déduit que les fréquences alléliques sont identiques d'une génération à une autre.

6 a. Remarquons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} \in \{0; 2N\} | X_n = k) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = k) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 2N | X_n = k) \\ &= \left(1 - \frac{k}{2N}\right)^{2N} + \left(\frac{k}{2N}\right)^{2N} \\ &= \left(\frac{2N - k}{2N}\right)^{2N} + \left(\frac{k}{2N}\right)^{2N} \end{aligned}$$

Puisque $k \geq 1$, $\left(\frac{k}{2N}\right)^{2N} \geq \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$. Puisque $k \leq 2N - 1$, $2N - k \geq 1$ et $\left(1 - \frac{k}{2N}\right)^{2N} \geq \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in \{0; 2N\} | X_n = k) \geq 2 \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}.$$

b. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = k])_{0 \leq k \leq 2N}$, on trouve :

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} \in \{0, 2N\}) = \sum_{k=0}^{2N} \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} \in \{0; 2N\}) \mathbb{P}(X_n = k)$$

D'après l'énoncé,

$$\mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} \in \{0; 2N\}) = \mathbb{P}_{[X_n=2N]}(X_{n+1} \in \{0; 2N\}) = 1.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} \in \{0; 2N\}) \mathbb{P}(X_n = 0) \\ &+ \mathbb{P}_{[X_n=2N]}(X_{n+1} \in \{0; 2N\}) \mathbb{P}(X_n = 2N) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 2N) = u_n \end{aligned}$$

De plus, d'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N-1} \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} \in \{0; 2N\}) \mathbb{P}(X_n = k) &\geq 2 \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} \sum_{k=1}^{2N-1} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} (1 - u_n). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n + 2(1 - u_n) \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = (1 - \alpha)w_n + \alpha$. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. En posant $t_n = w_n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = w_n - 1 + \alpha(1 - w_n) = (1 - \alpha)w_n.$$

La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\alpha \in]0, 1[$. On en déduit qu'elle converge vers 0 et ainsi que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1.$$

d. Posons $\alpha = 2 \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$. Puisque $N \geq 1$, $\alpha \in]0, 1[$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq w_n$.

L'initialisation est triviale. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq w_n$. D'après la question 2.b, on a :

$$u_{n+1} \geq u_n + 2(1 - u_n) \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} \geq w_n + 2(1 - w_n) \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} = w_{n+1}.$$

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n \leq u_n \leq 1$ (u_n est une probabilité). La question précédente et le théorème d'encadrement de limites assure alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

On en déduit qu'après un grand nombre de générations, il est quasi-certain que tous les individus soient homozygotes.

On illustre ici un phénomène de dérive génétique.

Partie II : Équilibre de Hardy-Weinberg

7 La variable aléatoire N_1 est égale au nombre de succès ("être du type 1") lors de la répétition de N expériences indépendantes de Bernoulli de probabilité de succès p_1 . La variable aléatoire N_1 suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p_1)$.

Par le même raisonnement, N_2 (resp. N_3) suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p_2)$ (resp. $\mathcal{B}(N, p_3)$).

8 Le cours donne directement que $\mathbb{E}(N_1) = Np_1$ et $\mathbb{V}(N_1) = Np_1(1 - p_1)$.

9 La variable aléatoire $\frac{N_1 - Np_1}{\sqrt{Np_1(1 - p_1)}}$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à N_1 qui suit une loi binomiale. Le théorème de Moivre-Laplace assure que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(a \leq \frac{N_1 - Np_1}{\sqrt{Np_1(1 - p_1)}} \leq b \right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- 10 a. Puisque $\text{Cov}(N_1, N_2) = \text{Cov}(N_2, N_1)$, la matrice W est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
- b. Puisque N_1 et N_2 admettent une variance, $aN_1 + bN_2$ aussi et

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(aN_1 + bN_2) &= a^2\mathbb{V}(N_1) + 2ab\text{Cov}(N_1, N_2) + b^2\mathbb{V}(N_2) \\ &= \mathbb{V}(aN_1) + 2\text{Cov}(aN_1, bN_2) + \mathbb{V}(bN_2) \end{aligned}$$

D'autre part, on trouve que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\mathbb{V}(N_1) + b\text{Cov}(N_1, N_2) \\ a\text{Cov}(N_1, N_2) + b\mathbb{V}(N_2) \end{pmatrix} \\ &= a^2\mathbb{V}(N_1) + 2ab\text{Cov}(N_1, N_2) + b^2\mathbb{V}(N_2) \\ &= \mathbb{V}(aN_1 + bN_2). \end{aligned}$$

- c. Soit λ une valeur propre de W . Notons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre de W associé à λ .

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda\|X\|^2.$$

Puisque X est un vecteur propre, $(a, b) \neq (0, 0)$ et ainsi $\|X\|^2 \neq 0$. D'après la question précédente, on trouve que :

$$\lambda = \frac{1}{\|X\|^2} \mathbb{V}(aN_1 + bN_2) \geq 0.$$

On en déduit que toutes les valeurs propres de W sont positives.

- d. Supposons par l'absurde que 0 est valeur propre de W .

Notons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre de W associé à 0. D'après les calculs de la question précédente, $\mathbb{V}(aN_1 + bN_2) = 0$. On en déduit que la variable aléatoire

$aN_1 + bN_2$ est constante presque-sûrement. Le couple (N_1, N_2) prend les valeurs $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$ avec des probabilités non nulles donc la variable aléatoire $aN_1 + bN_2$ prend les valeurs 0, a et b avec des probabilités non nulles. Puisque $(a, b) \neq (0, 0)$, la variable aléatoire $aN_1 + bN_2$ prend au moins deux valeurs distinctes, ce qui est absurde.

On en déduit que 0 n'est pas valeur propre de W et donc que W n'admet que des valeurs propres strictement positives.

- e. D'après la question 10.a, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (donc inversible et vérifiant $P^T = P^{-1}$) et une matrice diagonale $\tilde{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ telles que $W = P\tilde{D}P^{-1}$. D'après la question précédente, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Posons $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix}$. La matrice diagonale D est bien inversible puisque ses coefficients diagonaux sont non nuls.

On remarque que $D^2 = \tilde{D}$. On en déduit donc que $W = PD^2P^{-1}$.

- 11 Calculons AWA^T :

$$AWA^T = (D^{-1}P^{-1})(PD^2P^{-1})(D^{-1}P^T)^T = DP^{-1}(PD^{-1}) = DD^{-1} = I_2.$$

On en déduit que $\mathbb{V}(Y_1) = \mathbb{V}(Y_2) = 1$ et $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$.

- 12 a. Puisque $N_1 + N_2 = N - N_3$, $\mathbb{V}(N_1 + N_2) = \mathbb{V}(N - N_3) = \mathbb{V}(N_3) = Np_3(1 - p_3)$.
- b. Puisque N_1 et N_2 sont finies, (N_1, N_2) admet une covariance. Puisque $\mathbb{V}(N_1 + N_2) = \mathbb{V}(N_1) + 2\text{Cov}(N_1, N_2) + \mathbb{V}(N_2)$, il vient que :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N_1, N_2) &= \frac{1}{2} (\mathbb{V}(N_1 + N_2) - \mathbb{V}(N_1) - \mathbb{V}(N_2)) \\ &= \frac{1}{2} (Np_3(1 - p_3) - Np_1(1 - p_1) - Np_2(1 - p_2)) \\ &= \frac{N}{2} ((1 - p_1 - p_2)(p_1 + p_2) - p_1(1 - p_1) - p_2(1 - p_2)) \\ &= -Np_1p_2. \end{aligned}$$

- c. Les valeurs propres de W sont non nulles donc la matrice W est inversible. Puisque $W \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il vient que :

$$\begin{aligned} W^{-1} &= \frac{1}{\mathbb{V}(N_1)\mathbb{V}(N_2) - \text{Cov}(N_1, N_2)^2} \begin{pmatrix} \mathbb{V}(N_2) & -\text{Cov}(N_1, N_2) \\ -\text{Cov}(N_1, N_2) & \mathbb{V}(N_1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{N^2p_1p_2(1 - p_1)(1 - p_2) - N^2p_1^2p_2^2} \begin{pmatrix} Np_2(1 - p_2) & Np_1p_2 \\ Np_1p_2 & Np_1(1 - p_1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{Np_1p_2p_3} \begin{pmatrix} p_2(1 - p_2) & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_1(1 - p_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d. Calculons $A^T A$:

$$A^T A = (D^{-1} P^T)^T (D^{-1} P^T) = P D^{-2} P^T = P D^{-2} P^{-1} = (P D^2 P^{-1})^{-1} = W^{-1}.$$

Calculons enfin $Y_1^2 + Y_2^2$:

$$\begin{aligned} Y_1^2 + Y_2^2 &= \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(A \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 \\ N_2 - N p_2 \end{pmatrix} \right)^T A \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 \\ N_2 - N p_2 \end{pmatrix} \\ &= (N_1 - N p_1 \quad N_2 - N p_2) A^T A \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 \\ N_2 - N p_2 \end{pmatrix} \\ &= (N_1 - N p_1 \quad N_2 - N p_2) W^{-1} \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 \\ N_2 - N p_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{N p_1 p_2 p_3} (N_1 - N p_1 \quad N_2 - N p_2) \begin{pmatrix} p_2(1-p_2) & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_1(1-p_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 \\ N_2 - N p_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{N p_1 p_2 p_3} (N_1 - N p_1 \quad N_2 - N p_2) \begin{pmatrix} p_2(1-p_2)(N_1 - N p_1) + p_1 p_2(N_2 - N p_2) \\ p_1 p_2(N_1 - N p_1) + p_1(1-p_1)(N_2 - N p_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{p_2(1-p_2)(N_1 - N p_1)^2 + 2p_1 p_2(N_1 - N p_1)(N_2 - N p_2) + p_1(1-p_1)(N_2 - N p_2)^2}{N p_1 p_2 p_3}. \end{aligned}$$

On remarque que le double produit du carré $(N_1 - N p_1 + N_2 - N p_2)^2 = (N - N p_3)^2$ est $2(N_1 - N p_1)(N_2 - N p_2)$. Ainsi $Y_1^2 + Y_2^2 = \frac{p_1 p_2 (N - N p_3)^2 + S}{N p_1 p_2 p_3}$ où :

$$\begin{aligned} S &= (p_2(1-p_2) - p_1 p_2)(N_1 - N p_1)^2 + (p_1(1-p_1) - p_1 p_2)(N_2 - N p_2)^2 \\ &= p_2 p_3 (N_1 - N p_1)^2 + p_1 p_3 (N_2 - N p_2)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} Y_1^2 + Y_2^2 &= \frac{p_1 p_2 (N - N p_3)^2 + p_2 p_3 (N_1 - N p_1)^2 + p_1 p_3 (N_2 - N p_2)^2}{N p_1 p_2 p_3} \\ &= \frac{(N - N p_1)^2}{N p_1} + \frac{(N - N p_2)^2}{N p_2} + \frac{(N - N p_3)^2}{N p_3}. \end{aligned}$$

Partie III. Étude la loi limite

13 Notons Φ la fonction de répartition de Z .

On trouve après calculs que la fonction de répartition de la variable Z^2 est la fonction :

$$F_{Z^2} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{t}) - 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

La fonction F_{Z^2} est trivialement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque la fonction Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction F_{Z^2} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que F_{Z^2} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Étudions la continuité de F_{Z^2} en 0. Remarquons que $\lim_{0^-} F_{Z^2} = 0$. Puisque $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ et puisque Φ est continue sur $\mathbb{R}$, $F_{Z^2}(0) = \lim_{0^+} F_{Z^2} = 0$.

La fonction F_{Z^2} est ainsi continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0. La variable aléatoire Z^2 est donc à densité et une densité de Z^2 est donnée par la fonction

$$f_{Z^2} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} & \text{si } t > 0 \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t).$$

14 La variable Z admet une variance donc un moment d'ordre 2, i.e. Z^2 admet une espérance. D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{V}(Z) + \mathbb{E}(Z)^2 = 1.$$

15 Soit x un réel strictement positif.

La fonction du second degré $(t \mapsto t(x-t))$ est continue et strictement positive sur l'intervalle $]0, x[$. Par opérations sur les fonctions, il vient que la fonction $\left(t \mapsto \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} \right)$ est continue sur $]0, x[$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t}{x}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, x[$.

Remarquons que $\varphi(]0, x[) =]0, 1[$. En posant $u = \frac{t}{x}$, on a $dt = \frac{1}{x}$.

Puisque l'énoncé admet que h est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $h(x)$ converge et le théorème

de changement de variable assure que :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} \\ &= \int_0^1 \frac{x du}{\sqrt{xu(x-xu)}} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} \\ &= h(1). \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 16 a. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, les variables X^2 et Y^2 le sont aussi. Puisque X^2 et Y^2 sont aussi à densité, leur somme est une variable à densité, de densité h donnée par :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z^2}(z-t)f_{Z^2}(t) dt$$

Soit $z \in \mathbb{R}$.

$$f_{Z^2}(z-y)f_{Z^2}(y) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-y > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < y < z.$$

On en déduit que $h(z) = 0$ pour tout $z \leq 0$ et :

$$\forall z > 0, h(z) = \int_0^z \frac{1}{2\pi\sqrt{t(z-t)}} e^{-\frac{z-t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt = \frac{1}{2\pi} h(z) e^{-\frac{z}{2}} = \frac{C}{2\pi} e^{-\frac{z}{2}}$$

Une densité de $X^2 + Y^2$ est donc : $\boxed{h : z \mapsto \frac{C}{2\pi} e^{-\frac{z}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z)}$

- b. On remarque que h est un multiple d'une densité de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, ce qui implique que h est une densité de cette loi (son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1).

On en déduit que $\boxed{C = \pi}$ et $X^2 + Y^2$ suit la loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi : $\boxed{\mathbb{E}(X^2 + Y^2) = 2 \text{ et } \mathbb{V}(X^2 + Y^2) = 2^2 = 4.}$

* *
*