

Exercice 1

a. Notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque $X \neq 0$ et $AX_1 = \frac{4}{3}X_1$, X_1 est un vecteur propre de A ,
associé à la valeur propre $\frac{4}{3}$.

b. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker} \left(A - \frac{1}{3}I_3 \right) \Leftrightarrow \left(A - \frac{1}{3}I_3 \right) X = 0 \Leftrightarrow (3A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow z = -x - y.$$

On en déduit que : $\text{Ker} \left(A - \frac{1}{3}I_3 \right) = \text{Vect}(X_2, X_3)$ ou :

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Puisque $\text{Ker} \left(A - \frac{1}{3}I_3 \right) \neq \{0\}$, $\frac{1}{3}$ est bien valeur propre de A .

Puisque $\langle X_2, X_3 \rangle = 1 \neq 0$, la famille (X_2, X_3) n'est pas orthogonale. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Notons $Y_3 = X_3 + aX_2$.

$$\langle X_2, Y_3 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle X_2, X_3 \rangle + a\|X_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, en posant $Y_3 = X_3 - \frac{1}{2}X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, on obtient une famille (X_2, Y_3) orthogonale.

En divisant chacun des vecteurs de cette famille par sa norme, on obtient une famille (U_2, U_3) orthonormée donc libre qui engendre $\text{Ker} \left(A - \frac{1}{3}I_3 \right)$ car :

$$\text{Ker} \left(A - \frac{1}{3}I_3 \right) = \text{Vect}(X_2, X_3) = \text{Vect}(X_2, Y_3) = \text{Vect}(U_2, U_3).$$

La famille

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right)$$

est une base orthonormée du sous-espace propre de A associé.

c. Remarquons que A est symétrique réelle donc ortho-diagonalisable en vertu du théorème spectral. On en déduit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à 3. En particulier $\text{Ker} \left(A - \frac{4}{3}I_3 \right)$ est de dimension 1 et ainsi :

$$\text{Ker} \left(A - \frac{4}{3}I_3 \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ est une base orthonormée de $\text{Ker} \left(A - \frac{4}{3}I_3 \right)$.

Puisque les espaces propres de A sont orthogonaux (A est symétrique réelle), la famille

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A . En notant

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

la matrice (orthogonale) de passage associée, on obtient que $P^{-1} = P^T$ et

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

d. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Ainsi $X = PY$ et :

$$X^T A X = Y^T P^T A P Y = (y_1 \quad y_2 \quad y_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{4}{3}y_3^2 \geq 0.$$

On a bien :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A X \geq 0.$$

e. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Notons X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique

et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. D'après les calculs réalisés à la question précédente, on a :

$$\langle u | f(u) \rangle = \langle X | AX \rangle = X^T AX = \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{4}{3}y_3^2$$

la dernière égalité étant obtenue lors des calculs à la question précédente. Or :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{4}{3}y_3^2 \leq \frac{4}{3}y_1^2 + \frac{4}{3}y_2^2 + \frac{4}{3}y_3^2 = \frac{4}{3}\|Y\|^2 \\ \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{4}{3}y_3^2 \geq \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{1}{3}y_3^2 = \frac{1}{3}\|Y\|^2. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{3}\|Y\|^2 \leq \langle u | f(u) \rangle \leq \frac{4}{3}\|Y\|^2.$$

Puisque P est une matrice orthogonale, Y est la matrice des coordonnées de u dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. En particulier, $\|u\| = \|X\| = \|Y\|$ (on pouvait aussi le prouver par le calcul), permettant ainsi de conclure :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad \frac{1}{3}\|u\|^2 \leq \langle u | f(u) \rangle \leq \frac{4}{3}\|u\|^2.$$

Exercice 2

1. Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$. Remarquons que :

$$[X = k] \cap [Y = \ell] = [X = k] \cap [N = k + \ell].$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \mathbb{P}(N = k + \ell) \mathbb{P}_{N=k+\ell}(X = k).$$

Or, sachant $[N = k + \ell]$, X suit la loi binomiale de paramètres $n = k + \ell$ et p . En effet, sachant $[N = k + \ell]$, X s'écrit comme la somme de $k + \ell$ variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p . Ainsi :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \binom{k + \ell}{k} p^k (1 - p)^\ell \mathbb{P}(N = k + \ell).$$

2. a. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) &= \binom{k + \ell}{k} p^k (1 - p)^\ell \mathbb{P}(N = k + \ell) \\ &= \binom{k + \ell}{k} p^k (1 - p)^\ell \frac{\lambda^{k + \ell}}{(k + \ell)!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k + \ell}}{k! \ell!} p^k (1 - p)^\ell. \end{aligned}$$

Puisque la famille $([Y = \ell])_{\ell \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on trouve par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \quad (\text{la série converge par } \sigma\text{-additivité}) \\ &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k + \ell}}{k! \ell!} p^k (1 - p)^\ell \\ &= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{((1 - p)\lambda)^\ell}{\ell!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{(1 - p)\lambda} \quad (\text{on reconnaît une série exponentielle}) \\ &= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}. \end{aligned}$$

La variable aléatoires X suit donc la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$. Par un raisonnement analogue, il vient que la variable aléatoire Y suit la loi de Poisson de paramètre $(1 - p)\lambda$.

b. Pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = \ell) &= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \times e^{-(1 - p)\lambda} \frac{((1 - p)\lambda)^\ell}{\ell!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k + \ell}}{k! \ell!} p^k (1 - p)^\ell \\ &= \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \end{aligned}$$

Les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes.

3. a. Puisque N n'est pas presque-sûrement nulle, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(N = n) > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$. L'événement $[X = k, Y = n - k]$ est contenu dans l'événement $[X = k]$. Or d'après la question 1, on a :

$$\mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^k \mathbb{P}(N = n) > 0.$$

On en déduit que $p_k > 0$ et, de manière analogue, que $q_k > 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
Puisque :

$$\mathbb{P}(N = 2n) \geq \mathbb{P}(X = n, Y = n) = \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = p_n q_n > 0,$$

on peut montrer que l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(N = n) > 0$ est non borné. Ainsi, le raisonnement qui précède peut être appliqué pour des valeurs de n arbitrairement grandes. On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, p_k > 0 \text{ et } q_\ell > 0.}$$

b. Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} & (k+1)(1-p)p_{k+1}q_\ell \\ &= (k+1)(1-p)\mathbb{P}(X = k+1)\mathbb{P}(Y = \ell) \\ &= (k+1)(1-p)\mathbb{P}(X = k+1, Y = \ell) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= (k+1)(1-p)\binom{k+1+\ell}{k+1}p^{k+1}(1-p)^\ell\mathbb{P}(N = k+1+\ell) \\ &= \frac{(k+\ell+1)!}{k!\ell!}p^{k+1}(1-p)^{\ell+1}\mathbb{P}(N = k+1+\ell) \\ &= (\ell+1)p\binom{k+\ell+1}{\ell+1}p^{k+1}(1-p)^\ell\mathbb{P}(N = k+1+\ell) \\ &= (\ell+1)p\mathbb{P}(X = k, Y = \ell+1) \\ &= (\ell+1)p\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \ell+1) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= (\ell+1)pp_kq_{\ell+1}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, (k+1)(1-p)p_{k+1}q_\ell = (\ell+1)pp_kq_{\ell+1}.}$$

c. (i) En fixant $\ell = 0$, on trouve :

$$\forall k \in \mathbb{N}, p_{k+1} = \frac{1}{k+1} \frac{pq_1}{(1-p)q_0} p_k.$$

(ii) Un raisonnement par récurrence permet de montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = p_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{pq_1}{(1-p)q_0} \right)^k p_0.$$

Posons $\lambda = \frac{pq_1}{(1-p)q_0}$. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} p_0.$$

Puisque les séries $\sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ et $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k)$ convergent et :

$$e^\lambda p_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} p_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1,$$

On en déduit que $p_0 = e^{-\lambda}$ et ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On en déduit que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{pq_1}{(1-p)q_0}$.

- d. On en déduit de même que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\mu = \frac{(1-p)p_1}{pp_0}$.
- e. Puisque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$, N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

* *

*