

Exercice 1

1. Puisque $y(0) = 1$ et $t_0 = 0$, $y_0 = y(t_0) = 1$.

La méthode d'Euler consiste à approximer $y'(t_k)$ par le taux d'accroissement :

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$$

où $h = t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{1000}$.

En reprenant l'équation différentielle, on trouve que :

$$\forall k \in \llbracket 0, 999 \rrbracket, \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \sin(y_k)$$

On en déduit que :

$$\forall k \in \llbracket 0, 999 \rrbracket, y_{k+1} = y_k + h \sin(y_k).$$

2.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
a, b = 0, pi
n = 1000
h = (b-a)/n
t = [a]
y = [1]
for k in range(n):
    y.append(y[k] + h*np.sin(y[k]))
    t.append(t[k] + h)
plt.plot(t, y)
plt.show()
```

Exercice 2

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique à coefficients réels, elle est donc diagonalisable en vertu du théorème spectral.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 - \lambda \\ -2 & 3 - \lambda & -1 \\ -\lambda & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 - \lambda \\ 0 & 4 - \lambda & \lambda - 4 \\ 0 & \lambda - 4 & -4 - 3\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 - \lambda \\ 0 & 4 - \lambda & \lambda - 4 \\ 0 & 0 & -8 - 2\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_3) \neq 3 \\ &\Leftrightarrow 4 - \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \{4; -2\}. \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Sp}(A) = \{4; -2\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(A + 2I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + 5z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi $\text{Ker}(A + 2I_3) = \text{Vect}(U)$ où $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En posant $V = \frac{1}{\|U\|}U$, on obtient une base orthonormée de $\text{Ker}(A + 2I_3)$.

De plus

$$X \in \text{Ker}(A - 4I_3) \Leftrightarrow -2x - y - z = 0 \Leftrightarrow z = -2x - y.$$

Ainsi $\text{Ker}(A - 4I_3) = \text{Vect}(X_1, X_2)$ où $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Puisque $\langle X_1, X_2 \rangle = 2$,

la famille (X_1, X_2) n'est pas orthogonale.

Cherchons un réel a tel que $X_3 = X_2 + aX_1$ soit orthogonal à X_1 .

$$\langle X_1, X_3 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle X_1, X_2 \rangle + a\|X_1\|^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{\langle X_1, X_2 \rangle}{\|X_1\|^2} = 1.$$

Ainsi le vecteur $X_3 = X_2 - X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à X_1 . En posant $Y_1 = \frac{1}{\|X_1\|} X_1$ et

$Y_3 = \frac{1}{\|X_3\|} X_3$, on obtient une famille orthonormée donc libre. Puisque :

$$\text{Ker}(A - 4I_3) = \text{Vect}(X_1, X_2) = \text{Vect}(X_1, X_2 - X_1) = \text{Vect}(X_1, X_3) = \text{Vect}(Y_1, Y_3),$$

La famille (Y_1, Y_3) forme donc une base orthonormée de $\text{Ker}(A - 4I_3)$.

On en déduit alors que $A = PDP^{-1}$ où $P^T = P^{-1}$ et :

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1. La variable X^0 est constante égale à 1 donc $\mathbb{E}(X^0) = 1$. On sait que $\mathbb{E}(X) = 0$. Puisque $\mathbb{V}(X) = 1$, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 1$, d'après la formule de König-Huygens.
2. Montrer que X admet un moment d'ordre k , i.e. X^k admet une espérance, revient, via le théorème du transfert à montrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| dx.$$

Par parité de l'intégrande sur $\mathbb{R}$, cela revient à montrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Les fonctions $u : x \mapsto \frac{x^{k-1}}{\sqrt{2\pi}}$ et $v : x \mapsto -e^{-\frac{x^2}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on calcule que

$u' : x \mapsto (k-1) \frac{x^{k-2}}{\sqrt{2\pi}}$ et $v' : x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{2}}$. Or, par croissances comparées, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = -\frac{x^{k-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Le théorème d'intégration par parties assure donc que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -(k-1) \frac{x^{k-2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

sont de même nature. Par hypothèse, la seconde intégrale est convergente (puisque X^{k-2} admet une espérance), donc la première l'est aussi. Ainsi X^k admet une espérance, i.e. X admet un moment d'ordre k . En réalisant la même intégration par parties mais sur $\mathbb{R}$ désormais, on trouve que :

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (k-1) \frac{x^{k-2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (k-1) \mathbb{E}(X^{k-2}).$$

3. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

X^0 admet une espérance, égale à 1 et $\frac{(2 \times 0)!}{2^0 0!} = 1 = \mathbb{E}(X^0)$. La propriété est donc initialisée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que X admet un moment d'ordre $2n$. D'après la question 1.b, X admet un moment d'ordre $2n+2$ et :

$$\mathbb{E}(X^{2n+2}) = (2n+2-1) \mathbb{E}(X^{2n}) = (2n+1) \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2)2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^{2n} admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

4. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$.

X^1 admet une espérance, égale à 0 ; la propriété est donc initialisée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que X admet un moment d'ordre $2n+1$. D'après la question 1.b, X admet un moment d'ordre $2n+1+2 = 2n+3$ et :

$$\mathbb{E}(X^{2n+3}) = (2n+3-1) \mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$$

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^{2n+1} admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0.$$

5. D'après les deux dernières questions, la variable aléatoire X admet des moments de tout ordre pair et impair, donc des moments de tout ordre.

Exercice 4

1. La fonction $\ell_{\alpha,r}$ est positive sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $\alpha \geq 0$.

De plus, si $\alpha = 0$, la fonction $\ell_{\alpha,r}$ est nulle sur $\mathbb{R}$, l'empêchant ainsi d'être une densité de probabilité. On se place désormais dans le cas où $\alpha > 0$ (valeur pour laquelle on vérifie aisément que $\ell_{\alpha,r}$ est positive sur $\mathbb{R}$).

La fonction $\ell_{\alpha,r}$ est continue sur $]0, r[$ par opérations sur les fonctions usuelles. Étant nulle sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et

r . Remarquons que la fonction $\left(t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{r^\alpha}\right)$ est continue sur $]0, r[$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\int_{\varepsilon}^r \ell_{\alpha,r}(t) dt = \int_{\varepsilon}^r \alpha \frac{t^{\alpha-1}}{r^\alpha} dt = \left[\frac{t^\alpha}{r^\alpha} \right]_{\varepsilon}^r = 1 - \frac{\varepsilon^\alpha}{r^\alpha} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1.$$

L'intégrale $\int_0^1 \ell_{\alpha,r}(t) dt$ converge donc et vaut 1.

Puisque $\ell_{\alpha,r}$ est nulle en dehors de $]0, r[$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \ell_{\alpha,r}(t) dt$ converge donc et vaut 1.

On en déduit que $\ell_{\alpha,r}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\alpha > 0$.

2. a. On trouve que, pour tout $x \leq 0$, $F(x) = 0$, pour tout $x \geq r$, $F(x) = 1$ et :

$$\forall x \in]0, r[, F(x) = \int_0^x \ell_{\alpha,r}(t) dt = \frac{x^\alpha}{r^\alpha}.$$

La fonction de répartition de X est donc la fonction :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^\alpha}{r^\alpha} & \text{si } 0 < x < r \\ 1 & \text{si } x \geq r. \end{cases}$$

- b. Soit $w \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}(W \leq w) = \mathbb{P}\left(-\ln\left(\frac{X}{r}\right) \leq w\right) = \mathbb{P}(X \geq re^{-w}) = 1 - \mathbb{P}(X < re^{-w}).$$

Si $w < 0$, $re^{-w} > r$ et ainsi $\mathbb{P}(W \leq w) = 0$.

Si $w \geq 0$, $re^{-w} \in]0, r[$ et ainsi $\mathbb{P}(W \leq w) = 1 - \frac{(re^{-w})^\alpha}{r^\alpha} = 1 - e^{-\alpha w}$.

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi usuelle : W suit la loi exponentielle de paramètre α .

3. a. On a : $-U_2(\Omega) = \mathbb{R}^-$. Pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(-U_2 \leq x) = 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, \mathbb{P}(-U_2 \leq x) = \mathbb{P}(U_2 \geq -x) = 1 - \mathbb{P}(U_2 < -x) = e^{\mu x}.$$

La fonction de répartition de $-U_2$ est donc la fonction :

$$F_{-U_2} : x \mapsto \begin{cases} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction F_{-U_2} est nulle donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par opérations sur les fonctions usuelles, F_{-U_2} est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$. La fonction F_{-U_2} est donc $\mathcal{C}^1$ (donc continue) sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, $F_{-U_2}(0) = 1$, $\lim_{0^-} F_{-U_2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\mu x} = 1$ et $\lim_{0^+} F_{-U_2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$.

La fonction F_{-U_2} est donc continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

On en déduit donc que $-U_2$ est une variable aléatoire à densité, de densité donnée par la fonction :

$$f_{-U_2} : t \mapsto \begin{cases} \mu e^{\mu t} & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

- b. Les variables aléatoires U_1 et $-U_2$ sont indépendantes (car U_1 et U_2 le sont) et à densité (qu'on notera respectivement f_{U_1} et f_{-U_2}), donc leur somme $U_1 - U_2$ est une variable aléatoire à densité, de densité donnée par la fonction :

$$g : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_{U_1}(t-x) f_{-U_2}(x) dx.$$

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R}. \text{ On a : } f_{U_1}(t-x) f_{-U_2}(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t-x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq t \\ x \leq 0 \end{cases}.$$

- Supposons que $t \leq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} g_{\lambda,\mu}(t) &= \int_{-\infty}^t \lambda e^{-\lambda(t-x)} \mu e^{\mu x} dx \\ &= \lambda \mu e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t e^{(\lambda+\mu)x} dx \\ &= \lambda \mu e^{-\lambda t} \left[\frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu} \right]_{-\infty}^t \\ &= \frac{\lambda \mu}{\lambda+\mu} e^{\mu t} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(\lambda+\mu)x} = 0 \text{ car } \lambda+\mu > 0 \right). \end{aligned}$$

- Supposons que $t > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
 g_{\lambda,\mu}(t) &= \int_{-\infty}^0 \lambda e^{-\lambda(t-x)} \mu e^{\mu x} dx \\
 &= \lambda \mu e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda+\mu)x} dx \\
 &= \lambda \mu e^{-\lambda t} \left[\frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu} \right]_{-\infty}^0 \\
 &= \frac{\lambda \mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda t} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(\lambda+\mu)x} = 0 \text{ car } \lambda+\mu > 0 \right).
 \end{aligned}$$

La fonction

$$g_{\lambda,\mu} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda \mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{\lambda \mu}{\lambda+\mu} e^{\mu t} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

est donc une densité de $U_1 - U_2$.

- c. On remarque que $Z = -\ln\left(\frac{sX}{rY}\right) = -\ln\left(\frac{X}{r}\right) - \left[-\ln\left(\frac{Y}{s}\right)\right]$. En posant,

$U_1 = -\ln\left(\frac{X}{r}\right)$ et $U_2 = -\ln\left(\frac{Y}{s}\right)$, on a $Z = U_1 - U_2$. D'après la question 2.c, les variables U_1 et U_2 suivent respectivement les lois exponentielles de paramètre α et β . Puisque les variables X et Y sont indépendantes, U_1 et U_2 sont indépendantes. D'après la question 3.b, la variable aléatoire $Z = U_1 - U_2$ est à densité et $g_{\alpha,\beta}$ est une densité de Z .

De plus :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}\left(\frac{sX}{rY} < \frac{s}{r}\right) = \mathbb{P}\left(Z > -\ln\left(\frac{s}{r}\right)\right) = \int_{-\ln\left(\frac{s}{r}\right)}^{+\infty} g_{\alpha,\beta}(t) dt.$$

- Supposons que $s < r$. Alors $-\ln\left(\frac{s}{r}\right) > 0$ et ainsi :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{-\ln\left(\frac{s}{r}\right)}^{+\infty} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha t} \right]_{-\ln\left(\frac{s}{r}\right)}^{+\infty} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \left(\frac{s}{r}\right)^\alpha.$$

- Supposons que $s \geq r$. Alors $-\ln\left(\frac{s}{r}\right) \leq 0$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X < Y) &= \int_{-\ln\left(\frac{s}{r}\right)}^0 \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} e^{\beta t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha t} dt \\
 &= \left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{\beta t} \right]_{-\ln\left(\frac{s}{r}\right)}^0 + \left[-\frac{\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha t} \right]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(1 - e^{-\beta \ln\left(\frac{s}{r}\right)}\right) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\
 &= 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{r}{s}\right)^\beta.
 \end{aligned}$$

On peut alors conclure :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha+\beta} \left(\frac{s}{r}\right)^\alpha & \text{si } s < r \\ 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{r}{s}\right)^\beta & \text{si } r \leq s. \end{cases}$$

Exercice 5

1. Étude d'un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

- a. (i) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ -2x + y + 5z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((2, -1, 1)).$$

Le vecteur $(2, -1, 1)$ est non nul donc forme une base de $\text{Ker } f$.

$$\begin{aligned} AX - X &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2x + 2y - 2z \\ 2x + 5y + z \\ -2x + y + 5y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4x + 2y - 2z \\ 2x - y + z \\ -2x + y - z \end{pmatrix} \\ &= \frac{-2x + y - z}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^3, f(u) - u \in \text{Ker } f.}$$

On pouvait aussi remarquer que $A^2 = A$, en déduire que $f^2 = f$ et donc que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $f(f(u) - u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

- (ii) • **Première méthode** : caractérisation par les coordonnées dans la base canonique des vecteurs de $\text{Im } f$.
Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$v \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^3, f(u) = v$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2a + 2b - 2c = x \\ 2a + 5b + c = y \\ -2a + b + 5c = z \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2a + 2b - 2c = x \\ 3b + 3c = y - x \\ 3b + 3c = x + z \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2a + 2b - 2c = x \\ 3b + 3c = y - x \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le dernier système admet une solution si, et seulement si, $2x - y + z = 0$.
Ainsi $2x - y + z = 0$ est une équation de $\text{Im } f$ qui est donc un plan de $\mathbb{R}^3$.

- **Deuxième méthode** : on montre que $\text{Im } f$ est un plan engendré par des vecteurs qui vérifient l'équation de plan donnée.
Par lecture de A , on trouve que :

$$\text{Im } f = \text{Vect}((2, 2, -2), (2, 5, 1), (-2, -1, -5)).$$

Puisque chacun des vecteurs $(2, 2, -2), (2, 5, 1)$ et $(-2, 1, 5)$ vérifient l'équation $2x - y + z = 0$, on en déduit que $\text{Im } f$ est inclu dans le plan d'équation $2x - y + z = 0$.

D'après la question précédente, $\text{Ker } f$ est de dimension 1, donc $\text{Im } f$ est de dimension 2 en vertu du théorème du rang ($\mathbb{R}^3$ est de dimension finie) ; c'est donc un plan. On conclut alors que $\text{Im } f$ est le plan d'équation $2x - y + z = 0$.

Le vecteur $(2, -1, 1)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P} = \text{Im } f$.

- (iii) Montrons que f est la projection orthogonale sur $\mathcal{P} = \text{Im } f$:

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) \in \mathcal{P}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On sait que $f(x) - x \in \text{Ker } f$. Or $\text{Ker } f = \text{Vect}((2, -1, 1))$ et $(2, -1, 1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Donc $\text{Ker } f = \mathcal{P}^\perp$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) - x$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$, donc $x - f(x)$ aussi.

Puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, x = \underbrace{f(x)}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{(x - f(x))}_{\in \mathcal{P}^\perp};$$

l'endomorphisme f est donc la projection orthogonale sur $\mathcal{P} = \text{Im } f$.

- b. (i) Le vecteur $f(x)$ est le projeté orthogonal de x sur $\mathcal{P}$. On sait que la distance du vecteur x au plan $\mathcal{P}$ est celle de x à $f(x)$, i.e. $\|f(x) - x\|$. D'après les calculs de la question 1.a.(i), on a :

$$\|f(x) - x\| = \left| \frac{-2x_1 + x_2 - x_3}{6} \right| \sqrt{(2^2 + (-1)^2 + 1^2)} = \frac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}}$$

On en déduit que la distance du x au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\boxed{\frac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}}}$.

Puisque $f(x)$ est le projeté orthogonal de x sur $\mathcal{P}$, $f(x)$ est orthogonal à $f(x) - x$. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\|f(x)\|^2 + \|x - f(x)\|^2 = \|f(x) + (x - f(x))\|^2 = \|x\|^2.$$

On en déduit que $\|f(x) - x\|^2 \leq \|x\|^2$, puis $\|f(x) - x\| \leq \|x\|$ par positivité des normes. Ainsi :

$$\boxed{\frac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

On pouvait aussi utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- (ii) En passant au carré l'inégalité précédente (les deux membres sont positifs), on trouve :

$$\frac{4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3}{6} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

On trouve immédiatement que :

$$\boxed{-4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \leq x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2.}$$

- (iii) En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on trouve que :

$$\begin{aligned} \langle x | f(x) \rangle &= X^T A X \\ &= x_1 \frac{2x_1 + 2x_2 - 2x_3}{6} + x_2 \frac{2x_1 + 5x_2 + x_3}{6} + x_3 \frac{-2x_1 + x_2 + 5x_3}{6} \\ &= \frac{(2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3) + (2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_2x_3) + (-2x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_3^2)}{6} \\ &= \boxed{\frac{2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3}{6}}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \langle x | f(x) \rangle \geq 0.$$

On en déduit que la fonction f vérifie la relation (E).

2. Étude d'un exemple dans $\mathbb{R}^n$.

- a. (i) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique (donc orthonormée) de $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$\langle f(x) | x \rangle = (AX)^T X = X^T A^T X = X^T (A^T X) = \langle x | f^*(x) \rangle.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle f(x) | x \rangle = \langle x | f^*(x) \rangle.}$$

- (ii) D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x | (f + f^*)(x) \rangle = \langle x | f(x) \rangle + \langle x | f^*(x) \rangle = 2\langle x | f(x) \rangle.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f + f^* \text{ vérifie (E)} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x | (f + f^*)(x) \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, 2\langle x | f(x) \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x | f(x) \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ vérifie (E)} \end{aligned}$$

On en déduit que f vérifie (E) si, et seulement si $f + f^*$ vérifie (E).

- (iii) Remarquons que la matrice $A + A^T$ est symétrique : $(A + A^T)^T = A^T + A$. La matrice $A + A^T$ est symétrique réelle, on peut donc appliquer le **théorème spectral** : il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1} = Q^T$, vérifiant :

$$\boxed{A + A^T = Q D Q^{-1}.}$$

- (iv) • Supposons que f vérifie (E). Ainsi $f + f^*$ aussi. Soit λ une valeur propre de $f + f^*$. Il existe alors un vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(f + f^*)(x) = \lambda x$. On en déduit que $0 \leq \langle x | (f + f^*)(x) \rangle = \langle x | \lambda x \rangle = \lambda \|x\|^2$. Puisque $x \neq 0$, $\lambda \geq 0$. On en déduit que $\text{Sp}(f + f^*) \subset \mathbb{R}^+$.
• Supposons que $\text{Sp}(f + f^*) \subset \mathbb{R}^+$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Notons X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$$\begin{aligned} \langle x | (f + f^*)(x) \rangle &= X^T (A + A^T) X \\ &= X^T Q D Q^{-1} X \\ &= X^T Q D Q^T X \\ &= (Q^T X)^T D (Q^T X) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k^2 \geq 0 \quad \text{où } Q^T X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

il vient immédiatement que $(f + f^*)$ puis f vérifient (E).

Ainsi, f vérifie (E) si, et seulement si $\text{Sp}(f + f^*) \subset \mathbb{R}^+$.

- b. (i) La matrice de $g + g^*$ dans la base canonique est :

$$B + B^T = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Les endomorphismes $g + g^*$ et f ont la même matrice dans la base canonique, ils sont donc égaux.

D'après la question 2.a.(ii), on en déduit que l'endomorphisme g vérifie (E) si, et seulement si, l'endomorphisme $f = g + g^*$ vérifie (E).

(ii) Raisonnons par l'absurde et supposons que g est diagonalisable.

Sa matrice B dans la base canonique serait alors diagonalisable. Puisqu'elle est triangulaire supérieure, on peut lire son spectre : $\text{Sp}(B) = \{1\}$. Si B était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice I_n ; il existerait alors une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P I_n P^{-1} = I_n$, ce qui est absurde car $B \neq I_n$.

On en déduit que g n'est pas diagonalisable.

(iii) La matrice $A - I_n$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uniquement composée de 1 ; ainsi

$$\boxed{\text{rg}(A - I_n) = 1.}$$

On en déduit que 1 est valeur propre de A puis, par le théorème du rang, que la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $n - 1$.

Remarquons que $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $n + 1$ est valeur propre de A . On pouvait aussi vérifier que :

$$\text{rg}(A - (n + 1)I_n) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 - n & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 - n & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} L_n \leftarrow \sum_{k=1}^n L_k < n.$$

Puisque A est symétrique réelle, A est diagonalisable d'après le théorème spectral. On remarque que la somme de dimensions des espaces propres associés aux valeurs propres 1 et $n + 1$ est supérieure ou égale à n (puisque $\dim E_{n+1} \geq 1$). Par diagonalisabilité de A , cette somme vaut n , donc $\dim E_{n+1} = 1$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{1, n + 1\}.}$$

Puisque $\text{Sp}(g + g^*) = \text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$, on en déduit que g puis f vérifient (E) d'après la question 2.a.(iv).

3. a. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Si $i = j$, $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i^2)$ (qui existe puisque X_i admet une variance). La formule de König-Huygens nous donne les coefficients de la diagonale :

$$\mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{V}(X_i) + \mathbb{E}(X_i)^2 = 2.$$

Si $i \neq j$, on invoque l'indépendance de X_i et X_j pour trouver les coefficients en dehors de la diagonale : $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) = 1$.

b. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Remarquons que :

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_1 X_j) x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_n X_j) x_j \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \langle x \mid f(x) \rangle &= X^T A X \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \mathbb{E}(X_i X_j) x_j \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i X_i x_j X_j \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j X_j \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i \right)^2 \right] \end{aligned}$$

c. Par positivité de l'espérance, il vient que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x \mid f(x) \rangle \geq 0$. L'endomorphisme f vérifie donc la relation (E).

* *
*