

Planche 1

Exercice.

On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa représentation graphique.
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire de densité f .
 - a. Déterminer sa fonction de répartition F .
 - b. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une relation entre $\mathbb{P}(X \leq -x)$ et $\mathbb{P}(X \geq x)$.

Exercice.

On s'intéresse à la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que A admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
3. Trouver les espaces propres associés.
4. Calculer A^n .
5. En déduire une expression de F_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé — Planche 1

Exercice.

- On trouve immédiatement que f est nulle sur $] -\infty, -\ln 2[$, croissante sur $[-\ln 2, 0]$, décroissante sur $[0, \ln 2]$ et nulle sur $[\ln 2, +\infty[$.
- La fonction f est trivialement positive sur \mathbb{R} et continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en $-\ln 2$ et $\ln 2$.

$$\int_0^{\ln 2} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2}.$$

Puisque f est paire sur \mathbb{R} , on trouve que son intégrale converge et vaut 1, montrant ainsi que f est une densité de probabilité.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < -\ln 2$, $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$.
Si $x \in [-\ln 2, 0]$, $\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\ln 2}^x e^t dx = e^x - \frac{1}{2}$.
Si $x \in [0, \ln 2]$, $\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{2} + \int_0^x e^{-t} dx = \frac{1}{2} + 1 - e^{-x}$.
Si $x > \ln 2$, $\mathbb{P}(X \leq x) = 1$.
 - Puisque f est paire sur \mathbb{R} , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leq -x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t) dt = \int_x^{+\infty} f(t) dt = \mathbb{P}(X \geq x).$$

Exercice.

- En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve immédiatement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

On prouve alors le résultat demandé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda(\lambda - 1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

On trouve alors que la matrice A admet deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- Soit $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(A - \lambda_1 I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda_1)x + y = 0 \\ x - \lambda_1 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \lambda_1 y$$

Ainsi $\text{Ker}(A - \lambda_1 I_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. On trouve de même que $\text{Ker}(A - \lambda_2 I_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- D'après la question précédente, on peut écrire : $A = PDP^{-1}$ où :

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & \lambda_1 \lambda_2^{n+1} - \lambda_2 \lambda_1^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_2 \lambda_1^n \end{pmatrix}$$

- En lisant la deuxième ligne de l'égalité matricielle de la question 1, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\lambda_2^n - \lambda_1^n].$$

Planche 2**Exercice.**

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

2. Soit X une variable aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} qui admet une espérance.

- a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) + (n+1) \mathbb{P}(X > n).$$

- b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \mathbb{P}(X > n) = 0$. Conclure.

Exercice.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. Existe-t-il deux entiers p et q tels que $A^{2p+1} = A^{2q}$?

Corrigé — Planche 2

Exercice.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > k) = q^k$ (on peut faire un calcul de somme par complémentaire ou bien voir que l'événement $[X > k]$ se réalise, si et seulement si, on effectue k échecs consécutifs réalisés avec la probabilité q).

Puisque la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} q^k$ converge, on en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) = \frac{1}{p} = \mathbb{E}(X)$.

2. a.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X > k) &= \sum_{k=0}^n (k+1) \mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k \mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=1}^n k (\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)) + (n+1) \mathbb{P}(X > n) \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) + (n+1) \mathbb{P}(X > n). \end{aligned}$$

- b. Puisque X admet une espérance, le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Or :

$$0 \leq (n+1) \mathbb{P}(X > n) = (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k).$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \mathbb{P}(X > n) = 0$. On en déduit que si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} admettant une espérance, alors la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$ converge et a pour somme $\mathbb{E}(X)$.

Exercice.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{rg}(A - \lambda I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda^2 & 1 + \lambda \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\text{Sp}(A) = \{-1; 1\}$. De plus :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi $E_{-1} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. A n'est donc pas diagonalisable car $\dim E_1 + \dim E_{-1} \neq 3$.

2. La matrice A est inversible car 0 n'est pas valeur propre de A .

3. Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers p et q tels que $A^{2p+1} = A^{2q}$.

Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1 .

Ainsi $A^{2p+1}X = (-1)^{2p+1}X = -X$ et $A^{2q}X = (-1)^{2q}X = X$. On en déduit que $X = 0$, ce qui est absurde.

Il n'est donc pas deux entiers p et q tels que $A^{2p+1} = A^{2q}$.