

## Planche 1

**Exercice 1**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On note  $\text{Id}_E$  l'application identité de  $E$ .

Pour tout endomorphisme  $f$  de  $E$ , on note  $f^0 = \text{Id}_E$  et pour tout entier naturel  $k$ ,  $f^{k+1} = f^k \circ f$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On dit qu'un endomorphisme  $f$  de  $E$  est cyclique d'ordre  $p$  s'il existe un élément  $\vec{a}$  de  $E$  vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(\vec{a}) = \vec{a}$ .
- La famille  $(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{p-1}(\vec{a}))$  est génératrice de  $E$ .
- La famille  $(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{p-1}(\vec{a}))$  est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille  $(\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{p-1}(\vec{a}))$  est alors appelée cycle de  $f$ .

1. Dans cette question,  $E = \mathbb{R}^2$ . On considère  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f : (x, y) \mapsto (-y, x)$ 
  - a. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .
  - b. En considérant  $\vec{a} = (1, 0)$ , observer que  $f$  est cyclique d'ordre  $p$ , l'entier  $p$  étant à préciser.
2. Dans cette question,  $E = \text{Vect}(\sin, \cos)$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  engendré par les fonctions  $\sin$  et  $\cos$ , où  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  désigne l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - a. Déterminer une base de  $E$ .
  - b. Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ . Pour  $f \in E$ , on note  $\tau_p(f)$  l'application définie par

$$\tau_p(f) : x \mapsto f\left(x + \frac{2\pi}{p}\right).$$

Montrer que  $\tau_p(f) \in E$ .

- c. Montrer que  $\tau_p : f \mapsto \tau_p(f)$  est un endomorphisme de  $E$ .
- d. On pose  $f = \sin$ . Exprimer, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\tau_p^k(f)$  en fonction des vecteurs de la base de  $E$  trouvée en 2.a.  
Montrer que pour tous  $k, \ell \in \mathbb{N}$ ,  $\tau_p^k(f) = \tau_p^\ell(f) \Leftrightarrow k \equiv \ell [p]$ .
- e. Montrer que  $\tau_p$  est cyclique d'ordre  $p$ .

**Exercice 2**

1. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = x_0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \arctan(u_n).$$

- a. Démontrer que la suite  $u$  est monotone, puis déterminer son sens de variation en fonction de la valeur de  $x_0$ .
  - b. Montrer que  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions  $h$  continues sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h(\arctan(x)).$$

## Corrigé — Planche 1

**Exercice 1**

1. Dans cette question,  $E = \mathbb{R}^2$ . On considère  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f : (x, y) \mapsto (-y, x)$

a. Trivial...

b. On trouve que  $f(\vec{a}) = (0, 1)$ ,  $f^2(\vec{a}) = (-1, 0)$ ,  $f^3(\vec{a}) = (0, -1)$  et  $f^4(\vec{a}) = (a)$ .

On en déduit que  $f$  est cyclique d'ordre 4.

2. a. La famille  $(\sin, \cos)$  est libre (car sinon  $\sin$  et  $\cos$  s'annuleraient aux mêmes points) donc elle forme une base de  $E$ .

b. Soit  $f \in E$ . Il existe alors  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f = \lambda \sin + \mu \cos$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tau_p(f) = \lambda \sin\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) + \mu \cos\left(x + \frac{2\pi}{p}\right).$$

On conclut avec les formules d'addition du sinus et du cosinus.

c. Grâce au résultat de la question précédente, il suffit de montrer la liberté de l'application  $\tau_p$ . Soient  $f$  et  $g$  deux vecteurs de  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tau_p(\lambda f + g)(x) = (\lambda f + g)\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) = \lambda f\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) + g\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) = \tau_p(f)(x) + \tau_p(g)(x).$$

On en déduit que  $\tau_p : f \mapsto \tau_p(f)$  est un endomorphisme de  $E$ .

d. On trouve sans difficulté que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \tau_p^k(f)(x) = \sin\left(x + \frac{2k\pi}{p}\right) = \sin(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right).$$

Ainsi  $\tau_p^k(f) = \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \sin + \sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \cos$ .

Soient  $k, \ell \in \mathbb{N}$ . Puisque  $(\sin, \cos)$  est libre, on trouve que :

$$\tau_p^k(f) = \tau_p^\ell(f) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = \cos\left(\frac{2\ell\pi}{p}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = \sin\left(\frac{2\ell\pi}{p}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{p} \equiv \frac{2\ell\pi}{p} [2\pi] \Leftrightarrow k \equiv \ell [p].$$

L'avant-dernière équivalence étant obtenue par exemple en passant en complexe.

e. Remarquons que  $\tau_p^p(f) = f$  par  $2\pi$ -périodicité de  $\sin$ .

La question précédente montre que tous les vecteurs  $(f, \tau_p(f), \tau_p^2(f), \dots, \tau_p^{p-1}(f))$  sont deux à deux distincts. On en déduit que  $\tau_p$  est cyclique d'ordre  $p$ .

**Exercice 2**

1. a. On commence par trouver deux intervalles stables par  $\arctan$  :  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_-$ . Ainsi, si  $x_0 \geq 0$  (resp.  $x_0 \leq 0$ ), tous les termes de la suites seront positives (resp. négatifs).

L'étude de la fonction  $g : x \mapsto \arctan(x) - x$  montre qu'elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{2} \leq 0.$$

La fonction  $g$  est donc décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Puisque  $g(0) = 0$ , la fonction  $g$  est positive sur  $\mathbb{R}_-$  et négative sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ . Ainsi :

- si  $x_0 \geq 0$ , la suite  $u$  est décroissante ;

- si  $x_0 \leq 0$ , la suite  $u$  est décroissante.

b. On peut appliquer le théorème de la limite monotone en majorant ou minorant par 0 selon que  $x_0 \in \mathbb{R}_+$  ou non. On en déduit que  $u$  est convergente. Notons  $\ell_{x_0}$  sa limite (qui dépend a priori de  $x_0$ ).

Par passage à limite de la relation de récurrence, on trouve que  $\ell_{x_0} = \arctan(\ell_{x_0})$ , i.e.  $g(\ell_{x_0}) = 0$ , i.e.  $\ell_{x_0} = 0$ . On en déduit que la suite  $u$  converge vers 0 quelque soit sa première valeur.

2. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe une fonction  $h$  solution du problème. Fixons  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$h(u_n) = h(\arctan(u_n)) = h(u_{n+1}).$$

La suite  $(h(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc constante égale à  $h(x_0)$ . Par continuité de  $h$  sur  $\mathbb{R}$  et convergence de  $u$  vers 0, on trouve que  $h(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(u_n) = h(0)$ .

On en déduit que  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

Synthèse. Toute fonction constante sur  $\mathbb{R}$  est trivialement solution du problème donc l'ensemble des solutions du problème est l'ensemble des fonctions constantes sur  $\mathbb{R}$ .

## Planche 2

**Exercice 1**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En cas d'existence, on note :  $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(tx) dt$ .

1. Résoudre l'équation différentielle : (E)  $y' = -xy$ .
2. Justifier, en utilisant une loi à densité, que  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  converge et déterminer sa valeur.
3. Montrer que  $f(x)$  converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer  $f(0)$ .
4. On souhaite à présent montrer que  $f$  peut se « dériver sous l'intégrale », c'est-à-dire que  $f$  est dérivable avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx) dt.$$

- a. Montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(b) = \cos(a) - (b - a) \sin(a) - \int_a^b (b - t) \cos t dt.$$

En déduire que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad |\cos(b) - \cos(a) + (b - a) \sin(a)| \leq \frac{(b - a)^2}{2}.$$

- b. Conclure.

5. Montrer que  $f$  est solution de (E), puis exprimer  $f$  à l'aide de fonctions usuelles.

**Exercice 2**

On note  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, E)$ . On suppose que  $n > p$ .

1. Montrer que toute valeur propre non nulle de  $f \circ g$  est valeur propre de  $g \circ f$ .
2. Montrer que 0 est nécessairement valeur propre de  $g \circ f$ .

3. Application. On pose :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Déterminer les valeurs propres de  $B \times A$  et en déduire celles de  $A \times B$ . La matrice  $A \times B$  est-elle diagonalisable ?

## Corrigé — Planche 2

**Exercice 1**

1. On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1. Les fonctions solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme  $x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}}$ , où  $K \in \mathbb{R}$ .
2. Puisque  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  est le moment d'ordre 2 de la loi normale centrée réduite (égal à 1), on en déduit que  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ .
3. Il suffit d'utiliser la comparaison de fonctions positives et la convergence absolue en majorant la fonction  $|\cos|$  par 1. On trouve immédiatement que  $f(0) = \sqrt{2\pi}$ .
4. a. Pour montrer la première égalité, il suffit d'appliquer une intégration par parties sur les fonctions  $u : t \mapsto (b-t)$  et  $v = \sin$ , toutes deux  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Supposons que  $a \leq b$ .

$$\left| \int_a^b (b-t) \cos t dt \right| \leq \int_a^b b-t dt = \frac{(b-a)^2}{2}.$$

On montre le résultat de la même manière lorsque  $b < a$ . Ainsi :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |\cos(b) - \cos(a) + (b-a) \sin(a)| = \left| \int_a^b (b-t) \cos t dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}.$$

- b. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $f$  est dérivable en  $x_0$ . Remarquons tout d'abord que les intégrales en jeu plus bas,  $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx_0) dt$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx_0) dt$  converge. Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx_0) dt \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left| \frac{\cos(tx) - \cos(tx_0) + (tx - tx_0) \sin(tx_0)}{x - x_0} \right| dt \\ &\leq |x - x_0| \int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

En faisant tendre  $x$  vers  $x_0$ , on trouve que le taux d'accroissement de  $f$  entre  $x$  et  $x_0$  tend vers  $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx_0) dt$ . Ainsi,  $f$  est dérivable en  $x_0$  et :

$$f'(x_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx_0) dt.$$

5. Par intégration par parties, on trouve que  $f'(x) = -xf(x)$  pour tout réel  $x$  (le crochet converge en  $+\infty$  et  $-\infty$  par majoration en valeur absolue et croissances comparées).

Ainsi, il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = Ke^{-\frac{x^2}{2}}$ . Puisque  $f(0) = \sqrt{2\pi}$ , on trouve que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

**Exercice 2**

1. Soit  $\lambda$  une valeur propre non nulle de  $f \circ g$ . Il existe alors un vecteur non nul  $x$  de  $F$  tel que  $f \circ g(x) = \lambda x$ . Ainsi,  $g \circ f(g(x)) = \lambda g(x)$ . Si  $g(x)$  était nul, alors  $f \circ g(x) = \lambda x$  le serait aussi. Puisque  $\lambda \neq 0$ , cela impliquerait que  $x = 0$ , ce qui est exclu. Ainsi  $g(x) \neq 0$  est un vecteur propre de  $g \circ f$ , associé à la valeur propre  $\lambda$ .

2. Puisque  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ , alors  $\text{rg } g \circ f \leq \text{rg } g$ . Or  $\text{rg } g \leq \dim F = p$  d'après le théorème du rang appliqué à  $g$ . Donc  $\text{rg } g \circ f < n$ . Puisque  $g \circ f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$ , il n'est pas injectif et donc 0 est valeur propre de  $g \circ f$ .
3. On trouve que :

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

En considérant le déterminant de  $BA - \lambda I_2$ , on trouve que le spectre de  $BA$  est l'ensemble des solutions de l'équation  $\lambda(\lambda - 8) - 20$ , i.e.  $\{-2; 10\}$ .

En notant  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  (resp.  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ ) l'application linéaire canoniquement associée à  $B$  (resp. à  $A$ ), on trouve que 0, -2 et 10 sont valeurs propres de  $AB$ . Puisque  $AB \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , la matrice est diagonalisable en vertu de la condition suffisante de diagonalisabilité.

## Planche 3

**Exercice 1**

Dans tout l'exercice  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $\mathbb{R}^n$  sera muni du produit scalaire canonique. On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  est une *similitude de rapport*  $k \in \mathbb{R}_+^*$  lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|u(x)\| = k \|x\|.$$

1. Dans tout l'exercice, on notera  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont  $A$  est la matrice dans la base canonique. Montrer que  $f$  est une similitude de  $\mathbb{R}^3$  et en donner le rapport.
2. Démontrer que toute similitude de  $\mathbb{R}^n$  est bijective. Montrer que la composée de deux similitudes est une similitude et que la réciproque d'une similitude est une similitude.
3. On reprend dans cette question l'étude de l'endomorphisme  $f$  de la question 1.
  - a. Démontrer que  $\text{Ker}(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  est une droite dont on déterminera un vecteur directeur unitaire  $a$ .
  - b. On note  $F = \text{Ker}(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})^\perp$ . Quelle est sa dimension ? En donner une base. Est-elle orthonormée ?
  - c. En déduire que la matrice  $A$  est semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels à déterminer.
4.
  - a. Démontrer que :  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \langle x | y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ .
  - b. En déduire que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  est une similitude de rapport  $k$  si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \langle f(x) | f(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle.$$

**Exercice 2**

Pour tout réel  $x$  on note  $\lfloor x \rfloor$  sa partie entière et  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ , appelé sa partie décimale. Soient de plus  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

1. Déterminer la loi de  $X + Y$  puis de  $\lfloor X + Y \rfloor$ .
2. Déterminer la loi de  $\{X + Y\}$ .
3. On considère une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$  toutes définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur  $[0, 1[$ . On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .
  - a. Établir que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$ .
  - b. Montrer que pour tout réel  $x$  et tout réel  $y \in [0, 1[$  :  $\{x + y\} = \{\{x\} + y\}$ .
  - c. En déduire pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la loi de  $\{S_n\}$  puis  $\mathbb{E}(\{S_n\})$ .

## Corrigé — Planche 3

**Exercice 1**

1. Soit  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\|f(v)\|^2 = (2x + 2y + z)^2 + (-2x + y + 2z)^2 + (x - 2y + 2z)^2 = 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 9\|v\|^2.$$

On en déduit que  $f$  est une similitude de rapport 3.

2. Soit  $f$  une similitude de rapport  $k$ . On trouve immédiatement que  $\text{Ker } f = \{0\}$ , donc que  $f$  est injective. Puisque  $f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie,  $f$  est bijective.

Soient  $g$  une autre similitude de rapport  $k'$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|g(f(x))\| = k'\|f(x)\| = kk'\|x\|.$$

Cela montre ainsi que  $g \circ f$  est une similitude de rapport  $kk'$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Puisque  $k \neq 0$ , on a :

$$\|x\| = \|f(f^{-1}(x))\| = k\|f^{-1}(x)\|.$$

Ainsi  $\|f^{-1}(x)\| = \frac{1}{k}\|x\|$ . Donc  $f^{-1}$  est une isométrie de rapport  $\frac{1}{k}$ .

3. a. On trouve que :

$$\text{Ker}(A - 3I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On en déduit que  $\text{Ker}(f - 3\text{Id}) = \text{Vect}(a)$  où  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ .

- b. Puisque  $\text{Ker}(f - 3\text{Id})$  est de dimension 1,  $F$  est de dimension 2. Puisque  $a$  est un vecteur normal au plan  $F$ ,  $F$  est d'équation  $x + z = 0$ .

Ainsi, la famille  $(b, c)$  où  $b = (0, 1, 0)$  et  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ , est une base orthonormée de  $F$ .

- c. Calculons  $f(b)$  et  $f(c)$  :  $f(b) = (2, 1, -2) = b + 2\sqrt{2}c$  et  $f(c) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -4, -1) = -2\sqrt{2}b + c$ .

La matrice  $A$  est bien semblable à la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$  où  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2\sqrt{2}$ .

4. a. Soit  $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ . Alors :

$$\frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle - \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle) = \langle x | y \rangle.$$

- b. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . L'implication indirecte est triviale. Montrons l'implication directe et supposons que  $f$  est une similitude de rapport  $k$ .

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle f(x) | f(y) \rangle = \frac{1}{4} (\|f(x + y)\|^2 - \|f(x - y)\|^2) = \frac{k^2}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = k^2 \langle x | y \rangle.$$

**Exercice 2**

1. Remarquons que  $(X + Y)(\Omega) = [0, 2]$ . Puisque  $X + Y$  est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité,  $X + Y$  est encore à densité, de densité donnée par :

$$f : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(z - x) dx.$$

Si  $z < 0$  ou  $z \geq 2$ ,  $f(z) = 0$ . Si  $z \in [0, 1]$ , alors :

$$f(z) = \int_0^z dx = z$$

Si  $z \in [1, 2[$ , alors :

$$f(z) = \int_{z-1}^1 dx = 2 - z$$

Remarquons que  $(\lfloor X + Y \rfloor)(\Omega) = \{0, 1\}$ . Puisque  $\mathbb{P}(\lfloor X + Y \rfloor = 0) = \mathbb{P}(X + Y < 1) = \frac{1}{2}$  (la loi de  $X + Y$  est symétrique par rapport à 1).

On en déduit que la variable aléatoire  $\lfloor X + Y \rfloor$  suit la loi  $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

2. Remarquons que  $\{X + Y\}(\Omega) = [0, 1[$ . Soit  $z \in [0, 1[$ .

$$\mathbb{P}(\{X + Y\} \leq z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) + \mathbb{P}(1 \leq X + Y \leq 1 + z) = z.$$

Ainsi  $\{X + Y\}$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

3. a. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ ,  $n + \lfloor x \rfloor \leq n + x < n + \lfloor x \rfloor + 1$ . Puisqu'on vient d'encadrer  $n + x$  entre deux entiers consécutifs, on trouve, par unicité de la partie entière que :  $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$ .
- b. Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in [0, 1[$ . Puisque  $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ , on déduit de la question précédente que :

$$\{x + y\} = \{\lfloor x \rfloor + \{x\} + y\} = \{\{x\} + y\}.$$

- c. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $Z_n = \{S_n\}$ . D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_{n+1} = \{Z_n + X_{n+1}\}.$$

On peut montrer par récurrence que  $\{S_n\}$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

On trouve alors que  $\mathbb{E}(\{S_n\}) = \frac{1}{2}$ .

## Planche 4

**Exercice 1**

Soit un entier  $N \geq 2$ . Une urne contient  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ . On y effectue une suite indéfinie de tirages avec remise. L'expérience est modélisée dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire correspondant au numéro du premier tirage pour lequel  $k$  boules distinctes ont été obtenues au moins une fois. En particulier,  $X_N$  représente le numéro du premier tirage pour lequel toutes les boules de l'urne sont sorties au moins une fois.

1. a. On note  $T_1 = X_1$  et, pour tout  $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$ ,  $T_k = X_k - X_{k-1}$ . Montrer que  $T_k$  suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre  $p_k$ .  
b. En déduire l'espérance et la variance de  $T_k$ .
2. Dans la suite, on pourra admettre que les variables  $T_k$  sont mutuellement indépendantes. Montrer que  $X_N$  admet une espérance et une variance, et déterminer  $\mathbb{E}(X_N)$  et  $\mathbb{V}(X_N)$ .
3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .  
a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$ .  
b. En déduire que :  $\mathbb{E}(X_N) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} N \ln N$ .
4. a. Montrer que :  $\mathbb{V}(X_N) \leq 2N^2$ .  
b. Montrer que, pour tout réel  $\alpha > 0$  :

$$\mathbb{P}(|X_N - NH_N| \geq \alpha N) \leq \frac{2}{\alpha^2}.$$

**Exercice 2**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $n \geq 2$ .

1. Dans le cas  $n = 2$ , on note  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $\text{Spec}(AB) = \text{Spec}(BA)$ .
2. Montrer que  $AB$  est inversible si et seulement si  $A$  et  $B$  le sont. En déduire que si 0 est valeur propre de  $BA$  alors 0 est valeur propre de  $AB$ .
3. Soit  $\lambda \neq 0$  tel que  $\lambda \notin \text{Spec}(AB)$ . Justifier que :

$$(\lambda I_n - BA)(I_n + B(\lambda I_n - AB)^{-1}A) = \lambda I_n,$$

et en déduire que  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $BA$ .

4. Montrer que  $AB$  et  $BA$  ont mêmes valeurs propres.

## Planche 5

**Exercice 1**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on note  $X_n$  une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} e^{-t/n} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Quelle est la loi de  $X_n$  ? Donner son espérance et sa variance.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < 1)$ .
  - a. Montrer que  $u_n = (e^{2/n} - 1) e^{-(n+1)/n}$ .
  - b. En déduire un équivalent simple et la limite de  $(u_n)$ .
3. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on considère l'évènement  $A_k = \left[ \frac{k+1}{2} < X_n < k+1 \right]$ .
  - a. Exprimer l'évènement  $B_n = \left[ X_n - \lfloor X_n \rfloor > \frac{1}{2} \right]$  en fonction des évènements  $A_k$ .
  - b. Calculer  $v_n = \mathbb{P}(B_n)$  ainsi que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .
4. On suppose désormais les variables  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  indépendantes et on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .
  - a. Déterminer la loi de  $M_n$ .
  - b. Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $w_n = \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < 1)$ , puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .

**Exercice 2**

On considère  $F$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme  $f : x \mapsto P(x) e^{-x}$  pour  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ . On note, pour  $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ ,  $f_k$  la fonction  $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et que  $\mathcal{C} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$  en est une base.
2. Soit  $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow F$  l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi(P) : x \mapsto e^{-x} (P(x) - x P'(x + 1)).$$

- a. Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans  $F$ .
  - b. On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Donner la matrice de  $\varphi$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .
  - c. L'application  $\varphi$  est-elle un isomorphisme ? Est-elle diagonalisable ?
3. On note  $E' = \text{Vect}(1_{\mathbb{R}_3[X]}, X^2, X^3)$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $F' = \text{Im}(\varphi)$  un sous-espace vectoriel de  $F$ . Montrer que :

$$\psi \mid \begin{array}{ccc} E' & \rightarrow & F' \\ P & \mapsto & \varphi(P) \end{array}$$

est un isomorphisme.

4. Résoudre dans  $\mathbb{R}_3[X]$  l'équation d'inconnue  $P$  suivante, où  $\alpha$  est un paramètre réel :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(P)(x) = e^{-x} (1 + \alpha x + x^2).$$

## Planche 6

**Exercice 1**

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ . On définit la trace de  $A$  par :  $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ .

1.
  - a. Montrer que  $Tr$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ .
  - b. Déterminer  $\text{Im}(Tr)$ . Pour  $n = 3$  donner une base de  $\text{Ker}(Tr)$ .
2.
  - a. Montrer que  $Tr(AB) = Tr(BA)$ .
  - b. Existe-t-il deux matrices  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  telles que  $AB - BA = I_n$  ?
3.
  - a. Calculer  $Tr(AA^\top)$ .
  - b. Montrer que  $A = A^\top = 0 \iff AA^\top = 0$ .
4.
  - a. Montrer que si  $A$  est diagonalisable, alors  $Tr(A)$  vaut la somme des valeurs propres.
  - b. Application — Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$ . Diagonaliser  $A$  si c'est possible.

**Exercice 2**

1. On pose  $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$  et  $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$ .
  - a. Montrer que ces intégrales convergent et que  $I = J$ .
  - b. En effectuant le changement de variable  $x = t - \frac{1}{t}$  dans l'intégrale  $I + J$ , calculer la valeur commune de  $I$  et  $J$ .
2. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{a}{1+x^4}$ . Déterminer le réel  $a$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité.
3. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .
  - a. Montrer que  $X$  admet une espérance et déterminer sa valeur.
  - b. Montrer que  $X$  admet une variance et déterminer sa valeur.

## Planche 7

**Exercice 1**

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  deux applications linéaires. On note  $h = f \circ g$ , et on suppose que la matrice de  $h$  est donnée dans la base canonique par :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $h \circ h = h$ , et que  $\text{rg}(h) = 2$ .
2. Montrer que  $\text{rg}(h) \leq \text{rg}(f)$  et  $\text{rg}(h) \leq \text{rg}(g)$ . En déduire les valeurs de  $\text{rg}(f)$  et de  $\text{rg}(g)$ .
3. On souhaite démontrer que  $g \circ f = \text{Id}$ . On considère  $\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \text{Im } f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ .
  - a. Justifier que  $\hat{f}$  est bijective.
  - b. En exploitant  $h \circ h = h$  et la question précédente, montrer que  $g \circ f \circ g = g$ .
  - c. Conclure.

**Exercice 2**

Pour  $n \geq 1$ , on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n} dx.$$

1. Trouver la limite de  $I_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .
2. Montrer que pour tout  $n \geq 1$  :
 
$$|I_n - J_n| \leq \frac{1}{2n(2n+1)}.$$
3. Calculer  $J_n$  pour  $n \geq 1$ . *Indication : on pourra effectuer le changement de variable  $t = 1 + x^n$ .*
4. En déduire un équivalent simple de  $I_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

## Planche 8

**Exercice 1**

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

1. Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2. On rappelle qu'alors  $UV$  possède une espérance. En considérant la quantité  $\mathbb{E}[(\lambda U + V)^2]$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , montrer l'inégalité suivante :

$$(\mathbb{E}(UV))^2 \leq \mathbb{E}(U^2) \mathbb{E}(V^2).$$

2. On considère une variable aléatoire  $X$  à valeurs positives, qui n'est pas quasi-certaine et qui possède une variance. On désigne par  $\alpha$  un réel de  $[0, 1]$ . On admet que  $\mathbb{E}(X^2) \neq 0$  et on note  $(\star)$  l'inégalité :

$$P(X > \alpha \mathbb{E}(X)) \geq (1 - \alpha)^2 \frac{(\mathbb{E}(X))^2}{\mathbb{E}(X^2)}. \quad (\star)$$

- a. Que devient  $(\star)$  si  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in [0, 1]$  ?  
 b. En déduire que :

$$(1 - p)^{n-1} \leq \frac{1}{(n - 1)p + 1}.$$

3. On souhaite démontrer  $(\star)$  dans cette question. On note  $Y$  la variable aléatoire indicatrice de l'évènement  $\{X > \alpha \mathbb{E}(X)\}$ , c'est-à-dire :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X > \alpha \mathbb{E}(X), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- a. Écrire l'espérance de  $Y$  en fonction de  $X$  et  $\alpha$ .  
 b. Vérifier l'inégalité :  $X \leq \alpha \mathbb{E}(X) + XY$ .  
 c. Conclure.

**Exercice 2**

On note  $F$  l'espace vectoriel des fonctions définies sur  $J = ]-1, +\infty[$  à valeurs réelles. Soit  $p \in \mathbb{N}$ , on définit pour tout  $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$  les fonctions  $f_k$  par :

$$\forall x \in J, \quad f_{-1}(x) = \ln(1 + x), \quad \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad f_k(x) = \frac{1}{(1 + x)^k}.$$

1. a. Montrer que  $\mathcal{B} = (f_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$  est une famille libre. On notera dans la suite  $E = \text{Vect } \mathcal{B}$ .  
 b. Que vaut  $\dim E$  ?  
 2. On note  $u$  l'application :

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & u(f) \end{array} \quad \text{avec} \quad u(f) : x \in J \longmapsto (1 + x)f'(x).$$

- a. Déterminer  $u(f_k)$  pour tout  $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$ , en déduire que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .  
 b. Déterminer son noyau et son image.  
 c. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ . L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

## Planche 9

**Exercice 1**

Soit  $F : x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ .

1.  $F$  est-elle la fonction de répartition d'une variable à densité ? Si oui, donner une densité  $f$ .
2. On définit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$ .
  - a. Montrer que  $X$  admet des moments à tout ordre.
  - b. Déterminer l'espérance de  $X$ .
3. On définit  $g$  telle que  $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .
  - a. Montrer que  $g$  définit une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $] -1, 1[$ .
  - b. On pose  $Y = g(X)$ . Montrer que la loi suivie par  $Y$  est une loi uniforme.
  - c. Déterminer  $\mathbb{E}(Y)$  et  $\mathbb{V}(Y)$ .

**Exercice 2**

Soit  $n$  un entier non nul et  $(E_n)$  l'équation d'inconnue  $x$  :

$$(E_n) \quad 1 + \ln(x + n) = x.$$

Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f_n(x) = x - \ln(n + x) - 1$ .

1. Pour  $n$  fixé supérieur ou égal à 1, montrer que  $(E_n)$  admet une unique solution  $a_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Étudier la monotonie de la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$ .
3. Pour  $n$  assez grand, et en déterminant le signe de  $f_n(n)$  puis de  $f_n(\ln n)$ , comparer pour la relation d'ordre les trois réels  $n$ ,  $\ln n$  et  $a_n$ .
4. En déduire la limite de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
5.
  - a. Déterminer une constante  $C$  telle que les suites  $(a_n)$  et  $(C \ln n)$  soient équivalentes.
  - b. Déterminer un équivalent simple de  $e^{a_n}$ .
6. Montrer que la suite  $(a_n - C \ln n)_{n \geq 1}$  est convergente et déterminer sa limite  $\ell$ .

## Planche 10

**Exercice 1**

1. a. Résoudre sur
- $\mathbb{R}$
- l'équation :

$$(1 + x^2) y' - nxy = 0 \quad (1)$$

- b. Résoudre sur
- $\mathbb{R}$
- l'équation :

$$(1 + x^2) y' - nxy = y \quad (2)$$

2. Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\varphi(P) = (1 + X^2)P' - nXP.$$

- a. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- b. Écrire la matrice  $\Phi$  de  $\varphi$  dans la base canonique.
- c. Déterminer le noyau de  $\varphi$ . L'application est-elle un automorphisme ?
4. Quelles sont les valeurs propres de  $\varphi$  ?

**Exercice 2**

1. Montrer que la fonction
- $F$
- définie sur
- $\mathbb{R}$
- par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

est une fonction de répartition.

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle ayant pour fonction de répartition  $F$ .

2. Déterminer une densité de  $X$ , et son espérance si elle existe.
3. a. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in ]0, 1[$ . Calculer  $P\left(k \leq \frac{1}{X} \leq k+t\right)$ .
- b. Soit  $Y = \frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$ , où  $[x]$  désigne la partie entière du réel  $x$ . Montrer que  $Y$  est une variable aléatoire de même loi que  $X$ .

## Planche 11

**Exercice 1**

1. Soit  $X$  une variable aléatoire prenant ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n \mathbb{P}(X > n).$$

b. On suppose que la série de terme général  $\mathbb{P}(X > n)$  est convergente et on note  $S$  sa somme. Montrer que  $\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) \leq S$  et en déduire que  $X$  possède une espérance.

c. On suppose que  $X$  possède une espérance.

i. Établir l'existence de  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k)$  et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k) \geq n \mathbb{P}(X > n).$$

ii. En déduire alors que la série de terme général  $\mathbb{P}(X > n)$  converge et que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

d. En déduire que  $X$  possède une espérance si et seulement si la série de terme général  $\mathbb{P}(X > n)$  converge et que, dans ce cas,  $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ .

2. Soit  $X$  une variable aléatoire admettant pour densité une fonction  $f$  nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$ , continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et continue à droite en 0. On note  $S$  la fonction définie par  $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ .

a. Montrer que :  $\forall A > 0, \quad \int_0^A S(t) dt = A S(A) + \int_0^A t f(t) dt$ .

b. Montrer que si  $X$  admet une espérance alors  $\forall A > 0, A S(A) \leq \int_A^{+\infty} t f(t) dt$ . En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} S(t) dt$  est convergente et qu'elle est égale à  $\mathbb{E}(X)$ .

c. Montrer, réciproquement, que si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} S(t) dt$  est convergente alors  $X$  admet une espérance et que  $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} S(t) dt$ .

**Exercice 2**

$X$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 4)$ , i.e. d'espérance  $m = 0$  et de variance  $\sigma^2 = 4$ . Soit  $M = \begin{pmatrix} 2X & 1 \\ -4 & X \end{pmatrix}$ .

Calculer la probabilité que  $M$  possède deux valeurs propres distinctes.

## Planche 12

**Exercice 1 : Intégrales de Dirichlet**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, \pi]$  par

$$f(x) = \int_0^x \ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) dt.$$

1. a. Montrer que  $f$  est bien définie sur  $]0, \pi]$ .  
b. Montrer que  $f$  admet un prolongement par continuité en  $x = 0$ .

2. On pose

$$I = f(\pi) \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \ln\left(2 \cos \frac{t}{2}\right) dt.$$

- a. Montrer que  $I = J$ .
- b. Montrer que

$$\int_\pi^{2\pi} \ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) dt = I.$$

- c. En utilisant  $I + J$  et les résultats de (a) et (b), montrer que  $I = 0$ .

3. a. Donner une expression de

$$\int_0^x \ln t \, dt.$$

- b. Déterminer la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$ .  
(On pourra utiliser l'inégalité  $\sin(u) \leq u$  pour  $u \in \mathbb{R}_+$ .)

4. a. Montrer que pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,

$$f(x) = \int_\pi^x \ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) dt.$$

- b. En déduire que  $f$  est dérivable sur  $]0, \pi]$ , donner sa dérivée et étudier les variations de  $f$  sur  $[0, \pi]$ .

**Exercice 2**

Une salle de spectacle contient  $N$  sièges avec  $N > 1$ . Un spectateur étourdi a perdu son billet et ne connaît plus le numéro de sa place. Il arrive à se faufiler en premier dans la salle et prend un siège au hasard. Puis les autres spectateurs rentrent dans la salle un par un et s'installent à leur place (soit elle est directement libre, soit elle est occupée par l'étourdi à qui ils demandent de bouger, et l'étourdi reprend un siège au hasard parmi les places vides restantes).

On suppose que tous les billets sont vendus.

On pose  $X_N$  la variable aléatoire égale au nombre de changements de place effectués par l'étourdi.

1. a. Déterminer  $X_N(\Omega)$ .  
b. Calculer  $\mathbb{P}(X_N = 0)$  et  $\mathbb{P}(X_N = N - 1)$ .
2. Pour  $N > 2$ , en considérant ce que fait la première personne entrant dans la salle après l'étourdi, écrire une relation de récurrence entre  $\mathbb{P}(X_N = k)$  et  $\mathbb{P}(X_{N-1} = k)$ ,  $\mathbb{P}(X_{N-1} = k - 1)$  pour  $k \in \llbracket 1; N - 1 \rrbracket$ .

Retrouver ainsi la valeur de  $\mathbb{P}(X_N = N - 1)$ .

3. a. Écrire une relation de récurrence entre  $\mathbb{E}(X_N)$  et  $\mathbb{E}(X_{N-1})$ .  
b. En déduire l'expression de l'espérance de  $X_N$ .