

Exercice 1

Écrire une fonction `nb_car` en Python qui prend en argument une chaîne de caractères et qui renvoie le nombre de caractères différents de la chaîne. *Par exemple, `nb_car("ananas")` devra renvoyer 3 car la chaîne "ananas" est composée des caractères "a", "n" et "s".*

Exercice 2

1. Montrer que :

$$\forall k \geq 3, \frac{1}{k (\ln k)^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t (\ln t)^2}.$$

2. En déduire que :

$$\forall n \geq 3, \sum_{k=3}^n \frac{1}{k (\ln k)^2} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$

3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$ converge.

Exercice 3

Un jeu se déroule comme suit : un joueur se trouve devant une infinité de portes numérotées $P_1, P_2, P_3, \dots$. Derrière chaque porte P_n ($n \in \mathbb{N}^*$), il y a un coffre, mais la probabilité que ce coffre contienne un trésor dépend de la porte. On sait que :

- derrière chaque porte P_n (avec $n \in \mathbb{N}^*$), il y a un trésor avec une probabilité $p_n = \frac{2}{3^n}$;
- le joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir face. S'il a effectué n lancers, il ouvre la porte P_n .
- le joueur décide de vérifier si le coffre contient un trésor.

On définit les événements T : "Le joueur trouve un trésor" et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_n : "le joueur ouvre la porte P_n " et F_n : "le joueur obtient face au n -ème lancer de la pièce".

1. Quelle est la probabilité que le joueur trouve un trésor en ouvrant la porte P_1 ?
2. a. Justifier que la famille $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne constitue pas un système complet d'événements.
b. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n)$. Que peut-on en déduire ?
3. En utilisant la formule des probabilités totales, calculez la probabilité que le joueur trouve un trésor.
4. Sachant que le joueur a trouvé un trésor, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la porte P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$?
5. Sachant que le joueur n'a pas trouvé de trésor, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la porte P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$?

* *
*