

Exercice 1

On parcourt la chaîne (par élément ou par indice). L'idée est de stocker chaque nouveau caractère lu dans une liste (qu'on appelle ici `car_deja_vus`). La longueur de la liste en fin de parcours est donc le nombre de caractères différents de la chaîne.

```
def nb_car(chaine):
    nb = 0
    car_deja_vus = []
    # parcours par élément
    for car in chaine:
        if car not in car_deja_vus:
            car_deja_vus.append(car)
    return len(car_deja_vus)

def nb_car(chaine):
    nb = 0
    car_deja_vus = []
    # parcours par indice
    for k in range(len(chaine)):
        if chaine[k] not in car_deja_vus:
            car_deja_vus.append(chaine[k])
    return len(car_deja_vus)
```

On propose ci-dessous une autre solution, utilisant la structure de dictionnaire (on pouvait aussi utiliser le type `set` (*ensemble*) mais il n'est pas au programme) :

```
def nb_car(chaine):
    dico = {}
    for car in chaine:
        dico[car] = True
    return len(dico)
```

Exercice 2

1. Soit $k \geq 3$. Une étude de fonction montre que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$ est

décroissante sur $[k-1, k]$ (on remarque que $k-1 > 1$). Ainsi :

$$\forall t \in [k-1, k], f(t) \geq f(k) \text{ i.e. } \frac{1}{t(\ln t)^2} \geq \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

On pouvait aussi raisonner comme suit. Soit $t \in [k-1, k]$.

Alors $3 \leq k-1 \leq t \leq k$ et $0 < \ln t \leq \ln k$ puis $0 < (\ln t)^2 \leq (\ln k)^2$. Par produit de ces deux inégalités (tous les termes sont positifs), on trouve que $0 < t(\ln t)^2 \leq k(\ln k)^2$. On en déduit alors que $\frac{1}{t(\ln t)^2} \geq \frac{1}{k(\ln k)^2}$.

On conclut par croissance de l'intégrale :

$$\forall k \geq 3, \int_{k-1}^k \frac{dt}{t(\ln t)^2} \geq \int_{k-1}^k \frac{dt}{k(\ln k)^2} = \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

2. Fixons $n \geq 3$. En sommant les inégalités de la question précédente pour tout k entre 3 et n , on trouve, grâce à la relation de Chasles que :

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_2^n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$

3. Puisque, pour tout $k \geq 3$, $\frac{1}{k(\ln k)^2} \geq 0$, la suite $\left(\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^2} \right)_{n \geq 3}$ est croissante. Étant donné qu'elle est majorée d'après la question précédente, elle converge en vertu du théorème de la limite monotone. On en déduit que la série $\sum_{k \geq 3} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ converge et ainsi que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

Exercice 3

1. D'après l'énoncé, la probabilité demandée est $p_1 = \frac{2}{3}$.
2. a. La réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} C_n$ ne constitue pas l'univers : son complémentaire est l'événement « le joueur obtient pile à chaque lancer », qui n'est pas l'événement impossible. On en déduit que la famille $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas un système complet d'événements.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $C_n = \overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_{n-1}} \cap F_n$. Il serait difficile d'invoquer l'indépendance des événements ici (à moins de reformuler l'expérience. On peut cependant invoquer la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(\overline{F_1}) \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(\overline{F_2}) \dots \mathbb{P}_{\overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_{n-2}}}(\overline{F_{n-1}}) \mathbb{P}_{\overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_{n-1}}}(F_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Puisque les événements de la famille $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux disjoints, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(C_n)$ converge par σ -additivité. En reconnaissant une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on trouve alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) = 1$ et puisque les événements de la famille $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux disjoints, la famille $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements.

3. On utilise la formule des probabilités totales avec le système quasi-complet $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) \mathbb{P}_{C_n}(T) \quad (\text{la série converge par } \sigma\text{-additivité}) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6^n} \\ &= 2 \left[-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n} \right] \\ &= 2 \left[-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} \right] \quad \left(\text{on reconnaît une série géométrique de raison } \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

La probabilité que le joueur trouve un trésor est donc $\frac{2}{5}$.

4. On cherche $\mathbb{P}_T(C_n)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}_T(C_n) = \frac{\mathbb{P}(T \cap C_n)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(C_n) \mathbb{P}_{C_n}(T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\frac{1}{2^n} \times \frac{2}{3^n}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{6^n}.$$

Sachant qu'il a trouvé un trésor, la probabilité qu'il ait choisi la porte P_n est $\frac{5}{6^n}$.

5. On raisonne de la même manière pour trouver $\mathbb{P}_{\overline{T}}(C_n)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\overline{T}}(C_n) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{T} \cap C_n)}{\mathbb{P}(\overline{T})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(C_n) \mathbb{P}_{C_n}(\overline{T})}{\mathbb{P}(\overline{T})} \\ &= \frac{\frac{1}{2^n} \times \left(1 - \frac{2}{3^n}\right)}{\frac{3}{5}} \\ &= \frac{5}{3 \times 2^n} \times \left(1 - \frac{2}{3^n}\right). \end{aligned}$$

Sachant que le joueur n'a pas trouvé de trésor, la probabilité qu'il ait choisi la porte P_n est $\frac{5}{3 \times 2^n} \times \left(1 - \frac{2}{3^n}\right)$.

* *

*