

Introduction

a. Il y a 9 dérangements, i.e. $d_4 = 9$:

- six permutations circulaires :

i	1	2	3	4
$\sigma_1(i)$	2	3	4	1

i	1	2	3	4
$\sigma_2(i)$	2	4	1	3

i	1	2	3	4
$\sigma_3(i)$	3	4	2	1

i	1	2	3	4
$\sigma_4(i)$	3	1	4	2

i	1	2	3	4
$\sigma_5(i)$	4	3	1	2

i	1	2	3	4
$\sigma_6(i)$	4	1	2	3

- et trois doubles transpositions :

i	1	2	3	4
$\sigma_7(i)$	2	1	4	3

i	1	3	2	4
$\sigma_8(i)$	3	1	4	2

i	1	4	2	3
$\sigma_9(i)$	4	1	3	2

b. On raisonne à l'aide de la formule des probabilités composées :

- La probabilité que $\sigma(1) = 3$ est $\frac{1}{3}$;
- sachant que $\sigma(1) = 3$, celle que $\sigma(3) = 2$ est $\frac{1}{2}$;
- sachant que $\sigma(1) = 3$ et $\sigma(3) = 2$, la probabilité que $\sigma(2) = 4$ et $\sigma(4) = 1$ est $\frac{1}{2}$.

Ainsi la probabilité de choisir σ est $\frac{1}{12}$. Il n'y a donc pas de tirage uniforme (car sinon on aurait trouvé $\frac{1}{d_4} = \frac{1}{9}$).

Partie I

- a. La fonction $t \mapsto \frac{t^n}{n!}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de primitive donnée par la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$$

Puisque P_n est polynomiale, $P_n + f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (P_n + f_n)'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} + e^x \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt + \frac{x^n}{n!} = P_n(x) + f_n(x).$$

On en déduit que la fonction $P_n + f_n$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène $y' - y = 0$ avec pour condition initiale $y(0) = 1$. On en déduit immédiatement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) + f_n(x) = e^x.$$

- La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. Elle admet donc un maximum sur cet intervalle qu'on notera K . Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$, on trouve (après avoir appliqué l'inégalité triangulaire) que :

$$|f_n(x)| \leq e \int_0^x \left| \frac{t^n}{n!} \right| e^{-t} dt \leq K e \int_0^x \left| \frac{t^n}{n!} \right| dt.$$

En distinguant par exemple selon les valeurs positives et négatives de x , et en posant $C = \frac{Ke}{(n+1)!}$, on trouve bien que :

$$\forall x \in [-1, 1], |f_n(x)| \leq C|x|^{n+1}.$$

- Supposons par l'absurde que tous les coefficients a_k ne sont pas nuls pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Notons k_0 le plus petit indice k tel que $a_k \neq 0$. Soit x au voisinage de 0. On a alors :

$$\frac{Q(x)}{x^{k_0}} = \sum_{k=k_0}^N a_k x^{k-k_0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_{k_0}.$$

Or $\left| \frac{Q(x)}{x^{k_0}} \right| \leq C|x|^{n+1-k_0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, impliquant ainsi que $a_{k_0} = 0$, ce qui est absurde.

On en déduit donc que tous les coefficients a_k sont nuls pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- Posons $Q_n : x \mapsto P_n(x)P_n(-x) - 1$. Puisque P_n est de degré n , Q_n est un polynôme de degré $2n$. Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} |Q_n(x)| &= |(e^x - f_n(x))(e^{-x} - f_n(x)) - 1| \text{ d'après la question 1.a} \\ &= |f_n(x)f_n(-x) - e^x f_n(-x) - e^{-x} f_n(x)| \\ &\leq |f_n(x)f_n(-x)| + |e^x f_n(-x)| + |e^{-x} f_n(x)| \\ &\leq C^2|x|^{2n+2} + 2Ce|x|^{n+1} \text{ d'après la question 1.b} \\ &\leq (C^2 + 2Ce)|x|^{n+1}. \end{aligned}$$

D'après la question 1.c, tous les coefficients des monômes de Q_n de degrés inférieurs ou égaux à n sont nuls, i.e. X^{n+1} divise Q_n . Il existe donc un polynôme R_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x)P_n(-x) = 1 + x^{n+1}R_n(x).$$

2. a. Il y a $n!$ permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, i.e. $\text{card}(S_n) = n!$, donc par équiprobabilité des permutations, $p_{0,n} = \frac{\text{card}(S_{0,n})}{\text{card}(S_n)} = \frac{d_n}{n!}$.
- b. Choisir une permutation de $T_{\mathcal{I}}$ revient à choisir une permutation sans point fixe d'un ensemble à $n - k$ éléments. Ainsi, $\text{card}(T_{\mathcal{I}}) = d_{n-k}$.
- c. Supposons que $k \neq n$. Puisque les $T_{\mathcal{I}}$ (de cardinal k) sont disjoints (et au nombre de $\binom{n}{k}$) et que leur réunion décrit l'ensemble $S_{n,k}$ des permutations à exactement k points fixes,

$$\text{card}(S_{n,k}) = \sum_{T_{\mathcal{I}} \subset S_n} \text{card}(T_{\mathcal{I}}) = \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

Par équiprobabilité des permutations et d'après la question 2.a :

$$p_{n,k} = \frac{\text{card}(S_{n,k})}{n!} = \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} p_{0,n-k}$$

Le résultat est encore (trivialement) vrai pour $k = n$.

Puisque les ensembles $(S_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ forment un système complet de S_n ,

$$1 = \sum_{k=0}^n p_{n,k} = \sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

3. a. Pour tout réel x , $G_n(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n d_j \frac{x^{i+j}}{i!j!}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, notons a_k le coefficient du monôme de degré k de G . Il vérifie :

$$a_k = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j=k}} \frac{d_j}{i!j!}$$

Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors, en vertu de la question précédente, on a :

$$a_k = \sum_{i=0}^k \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} = 1$$

Si $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, alors :

$$0 < a_k = \sum_{i=k-n}^n \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} < \sum_{i=0}^k \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} = 1.$$

- b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_n(x)P_n(-x) = P_n(x)P_n(-x)D_n(x) = D_n(x) + x^{n+1}D_n(x)R_n(x).$$

Le coefficient de degré n de $D_n + X^{n+1}D_nR_n$ étant celui de D_n , c'est $\frac{d_n}{n!}$.

Le coefficient de degré n du polynôme $x \mapsto G_n(x)P_n(-x)$ est :

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Puisque ces deux polynômes sont égaux, on a bien :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{d_n}{n!}$$

- c. D'après la question 3.a, on a :

$$G(x) = \sum_{k=0}^n x^k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^k.$$

Puisque $|x| < 1$, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x}.$$

De plus :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{2n} |x|^k \leq |x|^{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} |x|^j \leq |x|^{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} |x|^j = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \frac{1}{1-x}$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ (puisque $D_n(x) = \frac{G_n(x)}{P_n(x)}$).

4. a. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Grâce à la question 2.c, on trouve que $p_{k,n} = \frac{1}{k!} p_{0,n-k}$ et

$$p_{n-1,k-1} = \frac{1}{(k-1)!} p_{0,n-k} \text{ donc } p_{n,k} = \frac{1}{k} p_{k-1,n-1}.$$

Puisque X_n est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n k p_{k,n} = \sum_{k=1}^n p_{k-1,n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} p_{j,n-1} = 1.$$

- b. On applique le théorème du transfert sur la variable aléatoire finie $X_n(X_n - 1)$:

$$\mathbb{E}(X_n(X_n - 1)) = \sum_{k=0}^n k(k-1) p_{n,k} = \sum_{k=2}^n p_{k-2,n-2} = \sum_{j=0}^{n-2} p_{j,n-2} = 1.$$

En appliquant la formule de König-Huygens et la linéarité, on trouve :

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \mathbb{E}(X_n(X_n - 1)) + \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_n)^2 = 1.$$

5. a. D'après les questions 2.a et 3.b, on a :

$$p_{0,n} = \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}.$$

La suite $(p_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $p_0 = e^{-1}$.

- b. Pour $n \geq k$, $p_{k,n} = \frac{1}{k!} p_{0,n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-1}}{k!}$. La suite $(p_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $p_k = \frac{e^{-1}}{k!}$. La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k$ est une série exponentielle ; elle converge donc et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} = e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} = 1.$$

- c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!} e^{-1}$; la variable aléatoire X suit donc la loi de Poisson de paramètre 1. Son espérance et sa variance sont égales à 1.

* *
* *