

Exercice 1

1. Écrire en Python une fonction `nb_car` qui prend en argument une chaîne de caractères et qui renvoie un dictionnaire dont les entrées sont les différents caractères de la chaîne et les valeurs correspondantes sont les nombres d'occurrences de chacun de ces caractères.

Par exemple, l'instruction `nb_car("ananas")` devra renvoyer le dictionnaire `{"a": 3, "n": 2, "s": 1}`.

2. Écrire en Python une fonction `indices_max` qui prend en argument une liste de nombres et qui renvoie la liste des indices du maximum de cette liste. Par exemple, l'instruction `indices_max([4, 3, 0, 4, 2])` devra renvoyer `[0, 3]`.
Un bonus sera attribué si le travail est réalisé en un seul parcours de la liste passée en argument.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j}$.

1. **Polynômes d'interpolation de Lagrange.**

- a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Quel est le degré de L_i ? Calculer, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i(x_j)$.
- b. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est libre, puis que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, appelée **base de Lagrange**.
- c. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les coordonnées de P dans cette base sont $(P(x_0), \dots, P(x_n))$. Retrouver alors la propriété bien connue : si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ s'annule en $x_0, \dots, x_n$, alors $P = 0$.
- d. Montrer que $\sum_{i=0}^n L_i = 1$ et que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{i=0}^n x_i^k L_i = X^k$.

2. **Application.**

- a. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Montrer que l'ensemble $F_k = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(x_0) = \dots = P(x_k) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par la famille $(L_{k+1}, \dots, L_n)$. Déterminer une base de F_k et donner sa dimension.
- b. Montrer que l'ensemble $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(x_0) = P(x_1)\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3

Une particule réalise une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. La particule se situe en $S_0 = 0$ à l'instant $n = 0$ et, à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$, elle effectue un pas d'une unité vers la droite avec la probabilité $p \in]0, 1[$ ou un pas d'une unité vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$. On supposera les déplacements mutuellement indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la position de la particule à l'instant n et D_n (resp. G_n) le nombre de pas vers la droite (resp. gauche) réalisés lors des n premiers déplacements.

1. Donner la loi de D_n , son espérance et sa variance.
2. Après avoir exprimé S_n en fonction de D_n et de n , déterminer son espérance et sa variance.
3. On suppose que $p = \frac{1}{2}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(|S_n| \geq \sqrt{4n}) \leq \frac{1}{4}$.
4. Calculer $\mathbb{P}(S_{2k+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(S_{2k} = 0)$ pour tout entier naturel k .
5. Donner la loi de la variable aléatoire T égale à l'instant du premier pas vers la droite. Préciser $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.
6. Exprimer la position S_T après le premier pas vers la droite en fonction de T . En déduire $\mathbb{E}(S_T)$ et $\mathbb{V}(S_T)$.
7. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ (où $\lambda > 0$), qu'on suppose indépendante de la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose désormais que la particule réalise N pas ; sa position est alors donnée par la variable aléatoire S_N .

- a. Soit $(d, g) \in \mathbb{N}^2$. Justifier que $[D_N = d, G_N = g] = [D_{d+g} = d, N = d + g]$. En déduire que :

$$\mathbb{P}(D_N = d, G_N = g) = \mathbb{P}(N = d + g) \binom{d+g}{d} p^d q^g.$$

- b. À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire que D_N et G_N suivent respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda p)$ et $\mathcal{P}(\lambda q)$ et montrer leur indépendance.
- c. Déterminer $\mathbb{E}(S_N)$ et $\mathbb{V}(S_N)$.

* *

*