

Questions de cours

1. Énoncer la formule des probabilités totales (dans sa forme la plus générale).
2. Énoncer le théorème de caractérisation d'une racine multiple d'un polynôme.

Exercice 1

Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 3y' + 2y = 0$ est un plan.

Exercice 2

Écrire une fonction `compte_chiffres` qui prend en argument une liste `L` de chiffres (nombres entiers entre 0 et 9) et qui renvoie une liste `nb_chiffres` (de longueur 10) telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$, `nb_chiffres[k]` corresponde au nombre de fois où k est répété dans `L`.

Par exemple, l'instruction `compte_chiffres([5, 1, 3, 1, 9, 5, 4, 4, 4])` devra renvoyer `[0, 2, 0, 1, 3, 2, 0, 0, 0, 1]`.

Un bonus sera attribué si la fonction ne parcourt qu'une seule fois la liste `L`.

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$, et que l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f (c'est-à-dire $f([0, 2]) \subset [0, 2]$).
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$.
3. En utilisant la croissance de f sur $[0, 2]$, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante en considérant $u_1 - u_0$.
4. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite ℓ .
5. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|.$$

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|,$$

puis retrouver la convergence de (u_n) vers ℓ à l'aide de ce résultat.

Exercice 4

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Justifier **rigoureusement** l'égalité suivante dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k).$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k).$$

On rappelle qu'on ne peut pas « diviser par un polynôme ».

3. Montrer alors que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = n.$$

4. Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, déterminer le module de $1 - \omega_k$.
5. En déduire la formule :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 5

Partie I : Ponte et éclosion

Une femelle d'une espèce d'insecte pond, au cours d'une saison, un certain nombre d'œufs. Soit $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'événement « la femelle pond exactement n œufs », et on admet que :

$$\mathbb{P}(E_n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Chaque œuf éclot avec la probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note H_k l'événement « exactement k œufs éclosent ».

1. Justifier que $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
2. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. En reconnaissant une variable aléatoire suivant une loi usuelle, montrer que :

$$\mathbb{P}(H_k | E_n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(H_k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$.
4. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Sachant qu'exactly k œufs ont éclos, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité que la femelle ait pondu n œufs.
5. Sachant qu'aucun œuf n'a éclos, quelle est la probabilité que la femelle n'ait pondu aucun œuf ?

Partie II : Survie des larves

Une population de larves est composée de deux types : le type A , en proportion $\alpha \in]0, 1[$, et le type B , en proportion $1 - \alpha$. Chaque larve traverse des stades successifs numérotés $1, 2, 3, \dots$ et peut mourir à chaque stade.

On choisit une larve au hasard et on note A (resp. B) l'événement « la larve est de type A » (resp. B) et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D_n l'événement « la larve meurt (exactement) au stade n » et S_n l'événement « la larve survit au stade n ».

Une étude de terrain a permis d'établir le modèle qui suit.

- Type A : pour tout $i \geq 1$, $\mathbb{P}_A(S_i | S_1 \cap \dots \cap S_{i-1}) = \frac{i}{i+1}$ (avec la convention que $S_1 \cap \dots \cap S_0$ est l'événement certain).
 - Type B : la survie à chaque stade a lieu avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des autres stades.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer D_n en fonction des événements $(S_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}_A(S_1 \cap \dots \cap S_n)$. En déduire que $\mathbb{P}_A(D_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *Pour la deuxième partie de la question, on cherchera une relation entre les ensembles $S_1 \cap \dots \cap S_{n-1}$, $S_1 \cap \dots \cap S_n$ et D_n .*
 8. Vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_A(D_n) = 1$. Que peut-on en conclure sur la probabilité qu'une larve de type A survive à tous les stades ?
 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}_B(D_n)$, puis montrer que $\mathbb{P}(D_n) = \frac{\alpha}{n(n+1)} + \frac{1-\alpha}{2^n}$.
 10. Une larve est morte au stade $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la probabilité qu'elle soit de type A . Que devient cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter.
 11. Une larve a survécu aux n premiers stades ($n \in \mathbb{N}^*$). Quelle est la probabilité qu'elle soit de type A ? Étudier sa limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter.

* *
*