

Exercice 1

Cf. chapitre « Espaces vectoriels ».

Exercice 2

```
def compte_chiffres(L):
    nb_chiffres = [0 for k in range(10)] # ou bien [0]*10
    for k in L:
        nb_chiffres[k] += 1
    return nb_chiffres
```

Exercice 3

1. La fonction $x \mapsto x + 2$ est croissante et positive sur $[0, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, donc la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ par composition. Puisque f est croissante et continue sur $[0, 2]$, $f([0, 2]) = [f(0), f(2)] = [\sqrt{2}, 2] \subset [0, 2]$. L'intervalle $[0, 2]$ est donc bien stable par f .
2. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le résultat est trivial pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \in [0, 2]$. Ainsi $f(u_n) \in f([0, 2])$ donc $u_{n+1} \in [0, 2]$. On a donc bien prouvé que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f est croissante sur $[0, 2]$, la différence $u_{n+1} - u_n$ est de même signe que $f(u_{n+1}) - f(u_n) = u_{n+2} - u_{n+1}$. On en déduit donc que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant, donc que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Puisque $u_1 - u_0 = \sqrt{2} \geq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 2) donc converge vers un réel $\ell \in [0, 2]$ en vertu du théorème de la limite monotone. Puisque $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ que ℓ vérifie l'équation $\ell = \sqrt{2 + \ell}$. On en déduit que $\ell^2 = 2 + \ell$. Cette dernière équation admet deux solutions : -1 et 2. Puisque $\ell \geq 0$, $\ell = 2$.

1. On pouvait aussi montrer que la suite u ne prend jamais la valeur $\ell = 2$ en prouvant qu'elle est strictement croissante

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $u_n = 2$, le résultat est trivial puisque $|u_{n+1} - \ell| = |f(2) - 2| = 0$ et $|u_n - 2| = 0$. Supposons¹ désormais que $u_n \neq 2$.

Remarquons que

$$\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = \frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell}.$$

On reconnaît un taux d'accroissement. Puisque la fonction f est continue et dérivable sur $[u_n, 2]$, il existe $c_n \in [u_n, 2]$ tel que :

$$\frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell} = f'(c_n).$$

Or :

$$\forall x \in [u_n, 2], f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}.$$

Ainsi :

$$\left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| \leq |f'(c_n)| = \frac{1}{2\sqrt{2+c_n}} \leq \frac{1}{2}.$$

On conclut alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|.$$

6. On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. La propriété est triviale pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$. Alors :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \ell|,$$

ce qui conclut la récurrence et montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

En passant à la limite cet encadrement, on trouve que $\lim |u_n - \ell| = 0$ (puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$), donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Exercice 4

1. Notons $P = X^n - 1$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P(\omega_k) = e^{2ik\pi} - 1 = 0$. On en déduit que les nombres $(\omega_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ sont des racines de P . Remarquons que ces nombres complexes sont deux à deux distincts : si $(k, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$, alors

$$\omega_k = \omega_j \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = \frac{2j\pi}{n} [2\pi] \Leftrightarrow k = j [n] \Leftrightarrow k = j.$$

On en déduit que le polynôme $\prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$ divise le polynôme P . Puisque ces deux polynômes sont de même degré et unitaires, ils sont en réalité égaux :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k).$$

2. Puisqu'on ne peut pas « diviser par un polynôme », on va retrouver le résultat par factorisation. Commençons par calculer :

$$(X - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} (X^{k+1} - X^k) = X^n - 1.$$

Ainsi :

$$(X - 1) \left[\sum_{k=0}^{n-1} X^k - \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k) \right] = X^n - 1 - \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k) = 0.$$

Puisque $X - 1$ n'est pas le polynôme nul, $\sum_{k=0}^{n-1} X^k - \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$ l'est, i.e. :

$$\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k).$$

3. En évaluant en 1 l'égalité précédente, on trouve immédiatement que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

4. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} |1 - \omega_k|^2 &= (1 - \omega_k) \overline{(1 - \omega_k)} \\ &= 1 - \omega_k - \overline{\omega_k} + |\omega_k|^2 \\ &= 2 - 2 \operatorname{Re}(\omega_k) \\ &= 2 - 2 \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) \\ &= 2 - 2 \left[1 - 2 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right] \\ &= 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$|1 - \omega_k| = 2 \left| \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right| = 2 \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right),$$

car $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$ et la fonction sin est positive sur $[0, \pi]$.

5. D'après le résultat de la question 3 et d'après les propriétés du module, on a :

$$n = \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) \right| = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - \omega_k| = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right).$$

On obtient bien la formule :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 5

1. Les événements de la famille $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints : la femelle ne peut pas pondre à la fois n et k œufs si $n \neq k$.

Remarquons que l'événement $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ est l'événement « la femelle pond au moins un œuf ». Son complémentaire est l'événement E_0 , garantissant ainsi que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est l'univers.

La famille $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme donc un système complet d'événements.

2. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

Supposons que $k > n$. Il est impossible que k œufs éclosent alors que la femelle n'en a pondue que n . Ainsi $\mathbb{P}(H_k | E_n) = 0$.

Notons X la variable aléatoire égale au nombre d'œufs éclos. Sachant que la femelle en a pondue n , X est le nombre de succès (« un œuf a éclos ») lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité p . Ainsi, sachant que E_n est réalisé, la variable X suit la loi binomiale de paramètres n et p :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(H_k | E_n) = \mathbb{P}(X = k | E_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On a donc bien :

$$\mathbb{P}(H_k | E_n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

3. On applique la formule des probabilités totales avec $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour système complet d'événements :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(H_k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) \mathbb{P}(H_k | E_n) \quad (\text{la série converge par } \sigma\text{-additivité}) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{car } \forall n < k, \mathbb{P}(H_k | E_n) = 0) \\ &= e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{j+k}}{j!} (1-p)^j \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \quad (\text{en reconnaissant une série exponentielle}) \\ &= e^{-\lambda p} \frac{p^k}{k!}. \end{aligned}$$

4. On cherche $\mathbb{P}_{H_k}(E_n)$. Si $n < k$, $\mathbb{P}_{H_k}(E_n) = 0$ (il ne peut pas y avoir plus d'œufs éclos que d'œufs).

Supposons que $n \geq k$. Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{H_k}(E_n) &= \frac{\mathbb{P}(E_n \cap H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E_n) \mathbb{P}_{E_n}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{e^{-\lambda p} \frac{p^k}{k!}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(1-p)} \lambda^n (1-p)^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

5. On cherche $\mathbb{P}_{H_0}(E_0)$. De la même manière qu'à la question précédente, on trouve

$$\mathbb{P}_{H_0}(E_0) = \frac{\mathbb{P}(E_0) \mathbb{P}_{E_0}(H_0)}{\mathbb{P}(H_0)} = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda p}} = e^{-\lambda(1-p)}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Réaliser l'événement D_n revient à ce que la larve survive à tous les stades de 1 à $n-1$ et ne survive pas au stade n :

$$D_n = S_1 \cap \dots \cap S_{n-1} \cap \overline{S_n}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\mathbb{P}_A(S_1 \cap \dots \cap S_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_A(S_i | S_1 \cap \dots \cap S_{i-1}) = \prod_{i=1}^n \frac{i}{i+1} = \frac{1}{n+1},$$

en reconnaissant un produit télescopique.

En remarquant que l'événement $S_1 \cap \dots \cap S_{n-1}$ (« la larve survit au $n-1$ premiers stades ») est la réunion disjointe de l'événement D_n et de l'événement $S_1 \cap \dots \cap S_n$ (« la larve survit aux n premiers stades »), on trouve que :

$$\frac{1}{n} = \mathbb{P}_A(S_1 \cap \dots \cap S_{n-1}) = \mathbb{P}_A(D_n) + \mathbb{P}_A(S_1 \cap \dots \cap S_n) = \mathbb{P}_A(D_n) + \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que $\mathbb{P}_A(D_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

8. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît une somme télescopique dans le calcul qui suit :

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}_A(D_n) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

On en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}_A(D_n)$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_A(D_n) = 1$.

Puisque les événements de la famille $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux disjoints, leur réunion, l'événement « la larve finit par mourir », est quasi-certaine sous la loi $\mathbb{P}_A$ d'après l'égalité précédente. Ainsi, la probabilité qu'une larve de type A survive à tous les stades est nulle.

9. Puisqu'il y a indépendance de survie des larves de type B entre les stades, on trouve que :

$$\mathbb{P}_B(D_n) = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2^n}.$$

Remarquons que la famille (A, B) forme un système complet d'événements. En vertu de la formule des probabilités totales, on trouve que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_n) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(D_n) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(D_n) \\ &= \alpha \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + (1-\alpha) \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ par équiprobabilité des larves} \\ &= \frac{\alpha}{n(n+1)} + \frac{1-\alpha}{2^n}. \end{aligned}$$

10. On cherche $\mathbb{P}_{D_n}(A)$. Par définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{D_n}(A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap D_n)}{\mathbb{P}(D_n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(D_n)}{\mathbb{P}(D_n)} \\ &= \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{n(n+1)} + \frac{1-\alpha}{2^n}} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \frac{(1-\alpha)n(n+1)}{2^n}}. \end{aligned}$$

Par croissances comparées, on trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{D_n}(A) = 1$.

Une mort tardive d'une larve est donc de plus en plus fortement associée au type A (dont la mortalité décroît en $\frac{1}{n^2}$ contre $\frac{1}{2^n}$ pour B).

11. On cherche $\mathbb{P}(A \mid S_1 \cap \dots \cap S_n)$. Par définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathbb{P}(A \mid S_1 \cap \dots \cap S_n) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S_1 \cap \dots \cap S_n)}{\mathbb{P}(S_1 \cap \dots \cap S_n)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(S_1 \cap \dots \cap S_n)}{\mathbb{P}(S_1 \cap \dots \cap S_n)}.$$

On doit donc calculer $\mathbb{P}(S_1 \cap \dots \cap S_n)$. En appliquant la formule des probabilités totales avec (A, B) comme système complet d'événements, on trouve :

$$\mathbb{P}(S_1 \cap \dots \cap S_n) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(S_1 \cap \dots \cap S_n) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(S_1 \cap \dots \cap S_n) = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{1-\alpha}{2^n},$$

la fin du calcul étant calqué sur le raisonnement réalisé à la question 9. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A \mid S_1 \cap \dots \cap S_n) = \frac{\frac{\alpha}{n+1}}{\frac{\alpha}{n+1} + \frac{1-\alpha}{2^n}} = \frac{\alpha}{\alpha + \frac{(1-\alpha)(n+1)}{2^n}}.$$

Toujours par croissances comparées, il vient que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A \mid S_1 \cap \dots \cap S_n) = 1.$$

Les larves survivantes de longue durée sont presque-sûrement de type A .

* *
*