Questions de cours

1. Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie puis celle de la dimension d'un espace vectoriel de de dimension finie.
2. Énoncer et démontrer le lien entre le rang du famille et son caractère libre ou générateur.
3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que X admet une espérance et variance qu'on calculera.

Exercice 1

Rappel : *la méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant, de proche en proche, l'approximation* $\dfrac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} \approx \varphi'(a)$ *en tout a lorsque h est petit.*

On cherche l'unique solution y de l'équation différentielle $(E) : \forall t \in [0,\pi],\ y'(t) + ty(t) = \cos(y(t))$ vérifiant $y(0) = 4$.
En subdivisant l'intervalle $[0,\pi]$ en 101 points équirépartis $(t_k)_{0\leqslant k\leqslant 100}$, on cherche à approcher les réels $y(t_k)$ par une suite finie $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant 100}$ par la méthode d'Euler.

1. Préciser la valeur de y_0 puis exprimer, pour tout $k \in [\![0,99]\!]$, y_{k+1} en fonction de y_k et d'un réel h à définir.
2. En déduire un script Python représentant graphiquement la solution approchée par la méthode d'Euler (aucune écriture de fonction n'est nécessaire).

Exercice 2

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + e^x$ réalise une bijection entre $\mathbb{R}$ et un ensemble à déterminer.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel x_n tel que $x_n + e^{x_n} = n$.
2. Comparer $f(x_{n+1})$ et $f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone et préciser sa monotonie.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{e^{x_n}}$ puis que $e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
5. Montrer alors que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 3

1. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
   On note $a = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   b. Vérifier que a et b appartiennent à E, puis montrer que la famille (a,b) est libre.
   c. Montrer que (a,b) est une base de E et donner la dimension de E.
   d. Déterminer la suite $u \in E$ telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 5$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
   a. Justifier en au plus deux phrases que la famille (I_2, A, A^2, A^3, A^4) est liée.
   b. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   c. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $M \in G$ si et seulement si $c = 0$ et $d = a$.
   d. En déduire une base de G et sa dimension.
   e. Calculer A^2 et l'exprimer en fonction de A et de I_2. La famille (I_2, A, A^2) est-elle libre ? Justifier.
   f. Montrer que $G = \text{Vect}(I_2, A)$.
   g. En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists(\lambda_n, \mu_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = \lambda_n I_n + \mu_n A.$$

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$, où $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On pose $T_n = \prod_{k=0}^{n} X_k$.

1. Écrire une fonction Python prenant en argument p et n et simulant la loi de T_n.
2. a. Calculer l'espérance et la variance de X.
   b. Donner l'espérance de T_n. En déduire la loi de T_n.
3. a. On pose $u_n = \mathbb{P}(T_n = 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = (2p - 1)u_n + 1 - p.$$
   b. Retrouver la loi de T_n.

Exercice 5

On dispose de trois pièces : une pièce équilibrée numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr (les deux côtés sont des "face") et une pièce numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr. On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout $i \in \{0; 1; 2\}$, on note A_i l'événement "on choisit la pièce numérotée i".

Pour tout entier naturel k non nul, on note F_k l'événement "on obtient face au k-ème lancer".

On considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition du premier "pile", et Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on a jamais obtenu "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on a jamais obtenu "face".

1. Écrire en Python une fonction `simule_X_tronque` qui prend en argument un entier naturel n, qui simule le choix de la pièce (0, 1 ou 2) et qui renvoie le rang du premier pile lors de la répétition d'au plus n lancers. Si aucun pile n'est obtenu à l'issu des n lancers, la fonction devra renvoyer 0.
2. a. Vérifier que $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$.
   b. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   c. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$. Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?
3. Montrer que X admet une espérance qu'on calculera.
4. Montrer que $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$.
5. Déterminer la loi de Y sans réaliser de calcul.
6. a. Montrer que pour tout entier naturel $j \geqslant 2$, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}(Y = j)$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel $i \geqslant 2$, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}(X = i)$.
7. a. Expliquer rigoureusement pourquoi $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$.
   b. Montrer que $\mathbb{P}(X + Y = 1) = \frac{2}{3}$.
   c. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a :
$$[X + Y = n] = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([X = n - 1] \cap [Y = 1]).$$
   d. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a :
$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

* *
*