Exercice 1

1. Puisque $y(0) = 4$ et $t_0 = 0$, $y_0 = y(t_0) = 4$
   La méthode d'Euler consiste à approximer $y'(t_k)$ par le taux d'accroissement :
   $$\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$$
   où $h = t_{k+1} - t_k = \dfrac{\pi}{100}$.
   En reprenant l'équation différentielle, on trouve que :
   $$\forall k \in [\![0, 99]\!],\ \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + t_k y_k = \cos(y_k)$$
   On en déduit que :
   $$\forall k \in [\![0, 99]\!],\ y_{k+1} = y_k + h(\cos(y_k) - t_k y_k).$$
2. ```
   import matplotlib.pyplot as plt
   import numpy as np
   a, b = 0, np.pi
   n = 100
   h = (b-a)/n
   t = [a]
   y = [4]
   for k in range(n):
       y.append(y[k] + h*(np.cos(y[k])-t[k]*y[k]))
       t.append(t[k] + h)
   plt.plot(t,y)
   plt.show()
   ```

Exercice 2

1. Puisque la fonction f est la somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, elle est encore continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection entre $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[= \mathbb{R}$.
   Puisque pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \in f(\mathbb{R})$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel x_n tel que $f(x_n) = x_n + e^{x_n} = n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $f(x_{n+1}) = n + 1 > n = f(x_n)$. Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $x_{n+1} > x_n$.
   Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien strictement croissante.
   On pouvait aussi remarquer que $x_n = f^{-1}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de la bijection assurant que f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on trouve que x_n est strictement croissante.
3. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant monotone elle admet une limite. Supposons que celle-ci soit finie et notons-là ℓ. Puisque $f(x_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient par passage à la limite $f(\ell) = +\infty$ (par continuité de f en ℓ), ce qui est absurde.
   On en déduit donc que la suite admet une limite infinie, donc qu'elle diverge vers $+\infty$ (d'après sa monotonie).
   On pouvait aussi remarquer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et donc que $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = +\infty$ (par croissance de f^{-1} sur $\mathbb{R}$). Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$.
4. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{e^{x_n}} = 0$ par croissances comparées. D'après la question 1, on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n}{e^{x_n}} = 1 + \frac{x_n}{e^{x_n}}.$$
   Ainsi, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^{x_n}} = 1$, i.e. $e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
5. On applique le logarithme à la relation trouvée à la question précédente :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln n - \ln\left(e^{x_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{x_n}{e^{x_n}}\right).$$
   On en déduit donc que :
   $$\forall n \geqslant 2,\ \frac{x_n}{\ln n} = 1 - \frac{\ln\left(1 + \dfrac{x_n}{e^{x_n}}\right)}{\ln n}.$$
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{e^{x_n}} = 0$, on trouve que :
   $$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln\left(1 + \dfrac{x_n}{e^{x_n}}\right)}{\ln n} = 1,$$
   et ainsi que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
   ```

Exercice 3

1. a. Par définition $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite nulle vérifie évidemment la relation de récurrence qui définit E, elle appartient donc à E. Soient u et v deux suites de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $w = \lambda u + v$.

   $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(u_{n+1} + 2u_n) + v_{n+1} + 2v_n = w_{n+1} + 2w_n$.

   Ainsi $w = \lambda u + v \in E$. On en déduit donc que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $a_{n+1} + 2a_n = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2} = a_{n+2}$
   $b_{n+1} + 2b_n = (-1)^{n+1} + 2(-1)^n = (-1)^n(-1+2) = (-1)^{n+2} = b_{n+2}$.

   On en déduit donc que a et b appartiennent à E.
   Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda a + \mu b = 0$, i.e. :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n\lambda + (-1)^n\mu = 0.$$

   En évaluant en $n = 0$ et $n = 1$, on trouve que $\lambda + \mu = 0$ et $2\lambda - \mu = 0$. En sommant ces deux égalités, on trouve que $3\lambda = 0$, i.e. $\lambda = 0$. En injectant cette égalité dans l'une des deux précédentes, on trouve que $\mu = 0$. On en déduit donc que la famille (a, b) est libre.

   c. D'après la question précédente, on sait que $\text{Vect}(a, b) \subset E$ (puisque E est stable par combinaisons linéaires).
   Montrons l'inclusion réciproque. Soit $u \in E$. La suite u vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 = x + 2x$. Puisque 2 et -1 sont les solutions de cette équation, on sait qu'il existe deux réels λ et μ tel que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 2^n + \mu(-1)^n,$$

   c'est-à-dire $u = \lambda a + \mu b$. On en déduit donc que $u \in \text{Vect}(a, b)$, prouvant ainsi que $E \subset \text{Vect}(a, b)$.
   On en déduit donc que $E = \text{Vect}(a, b)$, i.e. (a, b) est une famille génératrice de E. Puisque (a, b) est libre, c'est une base de E, qui est donc de dimension 2.

   d. On sait qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \lambda a + \mu b$. Ainsi $\lambda + \mu = 1$ et $2\lambda - \mu = 5$. On trouve après calculs que $\lambda = 2$ et $\mu = -1$ et donc que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}.$$

2. a. La famille (I_2, A, A^2, A^3, A^4) est une famille de cinq vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4. Puisqu'il y a strictement plus de vecteurs dans cette famille que la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cette famille est liée.

   b. Par définition $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice nulle 0_2 commute trivialement avec A donc $0_2 \in G$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in G^2$.

   $$A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$$

   On en déduit que $\lambda M + N \in G$. L'ensemble G est donc stable par combinaisons linéaires.
   On a donc bien prouvé que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   c. Remarquons que :

   $$AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } MA = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

   Ainsi :

   $$M \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a+c = a \\ b+d = a+b \\ d = c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = a. \end{cases}$$

   d. On en déduit immédiatement que :

   $$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ aI_2 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect}(I_2, N), \end{aligned}$$

   en notant $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Étudions la liberté de la famille (I_2, N).

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aI_2 + bN = 0_2$. On en déduit que $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = 0_2$, puis que $a = b = 0$, montrant ainsi la liberté de la famille (I_2, N). Puisque cette famille engendre G, c'en est une base et $\dim G = 2$.

e. On trouve immédiatement que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A - I_2.$$

On vient de trouver une relation de liaison ; la famille (I_2, A, A^2) n'est donc pas libre.

f. Puisque $N = A - I_2$, $G = \text{Vect}(I_2, N) = \text{Vect}(I_2, A - I_2) = \text{Vect}(I_2, A)$.

g. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $A^n \in G : A^n \times A = A^{n+1} = A \times A^{n+1}$. Ainsi $A^n \in \text{Vect}(I_2, A)$. Il existe donc $(\lambda_n, \mu_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = \lambda_n I_2 + \mu_n A$.

Exercice 4

1.
```
import random as rd

def simuleT(n,p):
    t = 1
    for k in range(n+1):
        if rd.random() > p: # réalisé avec proba 1-p
            t = -t
    return t
```

2. a. La variable X étant finie, elle admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = 1\mathbb{P}(X = 1) - 1\mathbb{P}(X = -1) = p - q.$$

La variable X^2 étant constante égale à 1, on a $\mathbb{E}(X^2) = 1$. D'après la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - (p-q)^2 = 4pq$.

b. Les variables aléatoires $X_0, \dots, X_n$ étant indépendantes et admettant une espérance, T_n admet aussi une espérance et :

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(X_0) \dots \mathbb{E}(X_n) = (p-q)^{n+1}.$$

Puisque $T_n(\Omega) = \{-1; 1\}$,

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{P}(T_n = 1) - \mathbb{P}(T_n = -1) = 2\mathbb{P}(T_n = 1) - 1.$$

On en déduit que la loi de T_n est donnée par

$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1 + (p-q)^{n+1}}{2} \text{ et } \mathbb{P}(T_n = -1) = \frac{1 - (p-q)^{n+1}}{2}.$$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $([X_{n+1} = -1], [X_{n+1} = 1])$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbb{P}(T_{n+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, T_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1, T_{n+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, T_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1, T_n = -1) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(T_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1)\mathbb{P}(T_n = -1) \\ &= pu_n + q(1 - u_n) = (2p-1)u_n + 1 - p, \end{aligned}$$

la pénultième ligne étant obtenue par indépendance de X_{n+1} et T_n (d'après le lemme des coalitions).

b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique dont $\frac{1}{2}$ est le point fixe. Après calculs, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(2p-1)^{n+1}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + (p-q)^{n+1}}{2} = \mathbb{P}(T_n = 1).$$

Puisque T_n ne prend que deux valeurs, on retrouve sans difficulté la loi de T_n.

Exercice 5

1.
```
import random as rd
def simule_X_tronque(n):
    piece = rd.randint(0,2) # choix de la pièce
    if piece == 1:
        return 0 # la piece 1 ne donne jamais pile
    elif piece == 2:
        return 1 # la piece 2 donne pile au 1er lancer
    else:
        rang = 1
        while rang <= n and rd.random() < 0.5:
            rang += 1
        if rang > n:
            return 0
        else:
            return rang
```

2. a. Puisque (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}\left(\overline{F_1}\right)\\ &= \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}\left(\overline{F_1}\right) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}\left(\overline{F_1}\right) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}\left(\overline{F_1}\right)\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{1}{2}$.

b. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On applique encore la formule des probabilités totales avec (A_0, A_1, A_2) pour système complet d'événements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n) &= \mathbb{P}\left(\overline{F_1}\cap\cdots\cap\overline{F_{n-1}}\cap F_n\right)\\ &= \sum_{k=0}^{2}\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}\left(\overline{F_1}\cap\cdots\cap\overline{F_{n-1}}\cap F_n\right).\end{aligned}$$

Puisque la pièce 1 ne donne jamais "pile", $\mathbb{P}_{A_1}\left(\overline{F_1}\cap\cdots\cap\overline{F_{n-1}}\cap F_n\right) = 0$.
Puisque $n \geqslant 2$, on ne peut obtenir pile pour la première fois au lancer n avec la pièce 2 puisqu'on l'obtient dès le premier lancer et ainsi $\mathbb{P}_{A_2}\left(\overline{F_1}\cap\cdots\cap\overline{F_{n-1}}\cap F_n\right) = 0$.
De plus, par indépendance des lancers une fois la pièce 0 choisie, i.e. par indépendance des lancers pour la loi $\mathbb{P}_{A_0}$, on a :

$$P_{A_0}\left(\overline{F_1}\cap\cdots\cap\overline{F_{n-1}}\cap F_n\right) = \mathbb{P}_{A_0}\left(\overline{F_1}\right)\ldots\mathbb{P}_{A_0}\left(\overline{F_{n-1}}\right)\mathbb{P}_{A_0}(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On en déduit que :

$$\forall n\geqslant 2,\ \mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\times 0^n + \frac{1}{3}\times 0^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

c. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Par σ-additivité, la série ci-dessous converge et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X=1) - \sum_{n=2}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(-1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) \text{ (série géométrique)}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{P}(X=0) = \dfrac{1}{3}$. On pouvait s'attendre à ce résultat car il s'agit de la probabilité de choisir la pièce 1. En effet :

- en choisissant la pièce 0, il est presque-sûr d'obtenir un « pile »
- en choisissant la pièce 2, il est certain d'obtenir pile (dès le premier lancer).

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |k\mathbb{P}(X=k)| &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(-1 + \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right).\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, la série géométrique dérivée $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

On en déduit donc que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument, c'est-à-dire que la variable aléatoire X admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(-1 + \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) = 1.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. En reconnaissant une somme partielle de série géométrique dérivée deux fois, convergente car de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ (et en réinvestissant les calculs réalisés à la question précédente), on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |k^2\mathbb{P}(X=k)| &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X=k)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n} [k(k-1)+k]\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{6}\times 3 = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument. Le théorème du transfert assure alors que X^2 admet une espérance, impliquant ainsi que X admet une variance, donnée par la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{7}{3} - 1^2 = \frac{4}{3}.$$

5. Par symétrie des caractéristiques des trois pièces (les trois donnent "pile" et "face" avec des probabilités respectives égales à 0, $\frac{1}{2}$ et 1), les variables X et Y suivent la même loi donnée par :

$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2} \text{ et } \forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(Y=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

6. a. Soit j un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Remarquons qu'on a toujours l'inclusion $[X=1]\cap[Y=j] \subset [Y=j]$. Montrons l'inclusion réciproque.

Si l'événement $[Y=j]$ est réalisé, c'est qu'on obtient pour la première fois un "face" au j-ème lancer, et, puisque $j \geqslant 2$, on a obtenu "pile" aux $j-1$ premiers lancers, notamment au premier. On a donc prouvé que $[Y=j] \subset [X=1]\cap[Y=j]$.

Les événements $[Y = j]$ et $[X = 1] \cap [Y = j]$ sont donc égaux. Ainsi :

$$\forall j \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}(Y = j).$$

b. Par symétrie des rôles de X et Y, on trouve un résultat analogue à celui de la question précédente :

$$\forall i \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}(X = i).$$

7. a. Commençons par remarquer que $(X + Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

La variable aléatoire $X + Y$ ne peut être égale à 0 car cela impliquerait que $X = 0$ et $Y = 0$, i.e. qu'on n'obtient ni "pile" ni "face", ce qui est impossible.

La variable aléatoire $X + Y$ ne peut être égale à 2. En effet, cela impliquerait alors qu'on soit dans l'un des trois cas suivants :

- $X = 0$ et $Y = 2$, i.e. on n'obtient jamais "pile" et le premier "face" au deuxième lancer, ce qui est impossible ;
- $X = 1$ et $Y = 1$, i.e. on n'obtient le premier "pile" et le premier "face" au premier lancer, ce qui est impossible ;
- $X = 2$ et $Y = 0$, i.e. on n'obtient jamais "face" et le premier "pile" au deuxième lancer, ce qui est impossible.

On a donc prouvé que $(X + Y)(\Omega) \subset \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$. Montrons que $n \in (X+Y)(\Omega)$. La valeur 1 est atteinte par $X + Y$ lorsqu'on choisit par exemple la pièce 1 et qu'on n'obtient que des faces : $X = 0$ et $Y = 1$.

Si $n \neq 1$, la valeur n est atteinte par $X + Y$ lorsqu'on choisit par exemple la pièce 0 et qu'on obtient successivement $n - 2$ "pile" puis une "face" : $X = 1$ et $Y = n - 1$.

On a donc prouvé que : $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$.

b. Puisque $[X + Y = 1] = ([X = 0] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 1] \cap [Y = 0])$ et que cette réunion est disjointe, on a :

$$\mathbb{P}(X + Y = 1) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0])$$

Remarquons que :

$$[X = 0] \cap [Y = 1] = [X = 0] \text{ et } [X = 1] \cap [Y = 0] = [Y = 0]$$

(le raisonnement est similaire à celui des questions 5.a et 5.b.). Ainsi :

$$\mathbb{P}(X + Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{2}{3}.$$

c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Remarquons que :

$$([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([X = n - 1] \cap [Y = 1]) \subset [X + Y = n].$$

Montrons alors l'inclusion réciproque. Puisqu'au premier lancer, on obtient nécessairement "pile" ou "face", l'une des variables aléatoires X ou Y prend la valeur 1. Ainsi, si $X + Y = n$, alors $X = 1$ (et nécessairement $Y = n - 1$) ou $Y = 1$ (et nécessairement $X = n - 1$). On a donc bien montré l'inclusion réciproque.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a :

$$[X + Y = n] = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([X = n - 1] \cap [Y = 1]).$$

d. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Par disjonction des événements et grâce aux questions 5.a et 5.b, on trouve que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y = n) &= \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = n - 1]) + \mathbb{P}([X = n - 1] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbb{P}(Y = n - 1) + \mathbb{P}(X = n - 1) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\forall n \geqslant 3,\ \mathbb{P}(X + Y = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

* *
*