Exercice 1

Écrire en Python une fonction **récursive** `somme` prenant en argument une liste de nombres et renvoyant la somme des valeurs de la liste. *Toute utilisation de la fonction* `sum` *(du module* `numpy`*) est proscrite.*

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

On note φ l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, (X-1), X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. a. Démontrer que φ est une application linéaire entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$ et $\dim \operatorname{Ker}\varphi$.
3. On considère l'application Θ qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $Q = \Theta(P)$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$
   a. Justifier que Θ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
   b. Démontrer que $\operatorname{Im}(\Theta) = \operatorname{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1})$.
   c. Démontrer que :
$$P \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \Theta(P) \in \operatorname{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)).$$
   d. Donner alors une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.
4. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}$.
   a. À l'aide du théorème de représentation matricielle, donner la dimension de $\mathcal{H}$.
   b. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le réel $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
   On admet que les applications $\psi_0,\ \ldots, \psi_n$ sont linéaires.
      (i) Montrer que :
$$\forall (k,p) \in [\![0,n]\!]^2,\ \psi_k\left(X^p\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq k \\ 1 & \text{si } p = k \end{cases}$$
      (ii) En déduire que la famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.
      (iii) Déterminer les coordonnées de φ dans cette base.

* *
*