ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

CONCOURS D'ADMISSION - SESSION 2019

FILIÈRE BCPST

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Lyon, Paris, Paris-Saclay et à l'ENPC

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le sujet comprend quatre pages numérotées de 1 à 4.

⋆ ⋆ ⋆

Début de l'épreuve

Le sujet est composé de trois parties. Les deux premières parties sont largement indépendantes. Elles traitent de l'étude d'un problème de minimisation, dans un cadre discret dans la première partie, et dans un cadre continu dans la deuxième partie. On pourra admettre les résultats des deux premières parties pour aborder la troisième partie.

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé, et soit $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n.

On appelle permutation de $[\![1,n]\!]$ toute bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$, et on définit la matrice d'une permutation p de $[\![1,n]\!]$ comme la matrice M à n lignes et n colonnes de cœfficients M_{ij} tels que $M_{ij}=1$ si $j=p(i)$ et $M_{ij}=0$ sinon, où $i\in[\![1,n]\!]$ est l'indice de ligne et $j\in[\![1,n]\!]$ est l'indice de colonne.

On appelle matrice bistochastique de taille (n,n) une matrice à n lignes et n colonnes de cœfficients M_{ij} positifs tels que $\sum_{j=1}^{n} M_{ij}=1$ pour tout i et $\sum_{i=1}^{n} M_{ij}=1$ pour tout j.

Soit alors les $2n$ nombres réels $x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n$ et $y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n$. Dans cette partie on se propose de minimiser la quantité

$$C(M)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-x_i\right)^2 M_{ij}$$

parmi les matrices bistochastiques M de taille (n,n) et de cœfficients M_{ij}.

1.1. (Question préliminaire) Montrer qu'une matrice de permutation est une matrice bistochastique.

1.2. (Question préliminaire) Soit les $2n$ nombres réels $b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_n$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\,c_i=b_1\sum_{j=1}^{n} c_j+\sum_{i=2}^{n}\left(b_i-b_{i-1}\right)\sum_{j=i}^{n} c_j.$$

1.3. (Exemple) Dans cette question uniquement n est égal à 3.

1.3.1. Déterminer toutes les permutations de $[\![1,3]\!]$ et écrire leurs matrices.

1.3.2. Soit les nombres $x_1=0, x_2=1, x_3=2, y_1=0, y_2=1$ et $y_3=4$. Calculer la quantité

$$\sum_{i=1}^{3}\left(y_{p(i)}-x_i\right)^2$$

pour chaque permutation p de $[\![1,3]\!]$ et déterminer la ou les permutations rendant minimale cette quantité.

1.4. (Exemple) Dans cette question uniquement n est égal à 2, et on considère les nombres $x_1=0, x_2=1$, $y_1=1$ et $y_2=4$.

1.4.1. Étant donné un réel $r\in[0,1]$, calculer $C(M)$ pour la matrice bistochastique

$$M=\begin{pmatrix}1-r & r\\ r & 1-r\end{pmatrix}.$$

1.4.2. Montrer que, parmi les matrices bistochastiques M de taille $(2,2)$, la matrice identité est l'unique matrice rendant minimale la quantité $C(M)$.

1.5. (Matrices de permutation)
1.5.1. Soit p une permutation de $[\![1,n]\!]$. Montrer que

$$\sum_{j=i}^{n} y_{p(j)} \leqslant \sum_{j=i}^{n} y_j$$

pour tout $i = 1, \dots, n$, avec de plus égalité pour $i = 1$. En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_{p(i)} - x_i\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i\right)^2.$$

On pourra développer les carrés et utiliser la question 1.2.

1.5.2. Montrer que, parmi les matrices de permutation M, la matrice identité rend minimale la quantité $C(M)$.

1.6. (Matrices bistochastiques symétriques)
1.6.1. Montrer que

$$x_i\, y_i + x_j\, y_j \geqslant x_i\, y_j + x_j\, y_i$$

pour tous $i, j = 1, \dots, n$.

1.6.2. En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(y_j - x_i\right)^2 M_{ij} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i\right)^2$$

pour toute matrice bistochastique symétrique M de taille (n, n).

1.6.3. Montrer que, parmi les matrices bistochastiques symétriques M de taille (n, n), la matrice identité rend minimale la quantité $C(M)$.

1.7. (Cas général)
1.7.1. Soit M une matrice bistochastique de taille (n, n). Montrer que

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{jk} y_k \leqslant \sum_{j=i}^{n} y_j$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. *Pour $i \geqslant 2$ on pourra montrer que*

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{jk}\, y_k \leqslant \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{kj}\, y_j.$$

En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(y_j - x_i\right)^2 M_{ij} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i\right)^2.$$

1.7.2 Montrer que, parmi les matrices bistochastiques M de taille (n, n), la matrice identité rend minimale la quantité $C(M)$.

1.7.3. Si de plus $x_1 < \cdots < x_n$ et $y_1 < \cdots < y_n$, montrer que, parmi les matrices bistochastiques M de taille (n, n), la matrice identité est l'unique matrice rendant minimale la quantité $C(M)$.

Partie 2

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et notons $\mathbb{E}[W]$ l'espérance d'une variable aléatoire W sur Ω.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

Soit de plus f une fonction continue strictement positive sur $[1,2]$ et telle que $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 1$.

Soit enfin $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions S continues de $[0,1]$ dans $[1,2]$ et telles que la variable aléatoire $S(U)$ admette f comme densité de probabilité.

Dans cette partie on se propose de minimiser la quantité $\mathbb{E}\left[\left(S(U)-U\right)^2\right]$ parmi les fonctions S de $\mathscr{S}$.

2.1. (Exemple) Dans cette question uniquement f est la fonction constante égale à 1.

2.1.1. Montrer que $\left(\mathbb{E}[g(U)]\right)^2 \leqslant \mathbb{E}[g(U)^2]$ pour toute fonction g continue sur $[0,1]$.
On pourra considérer la quantité $\mathbb{E}\left[\left(g(U)-\mathbb{E}[g(U)]\right)^2\right]$.

Montrer qu'il y a égalité si et seulement si la fonction g est de plus constante.

2.1.2. Montrer que la fonction S_0 sur $[0,1]$ définie par $S_0(x) = x+1$ est l'unique fonction rendant minimale la quantité $\mathbb{E}\left[\left(S(U)-U\right)^2\right]$ parmi les fonctions S de $\mathscr{S}$.

Soit V une variable aléatoire admettant la densité de probabilité f.

2.2. Montrer que la restriction à $[1,2]$ de la fonction de répartition F_V de la variable V réalise une bijection de $[1,2]$ sur $[0,1]$ et que sa fonction réciproque F_V^{-1} sur $[0,1]$ appartient à $\mathscr{S}$.
Montrer de plus que F_V^{-1} est l'unique fonction de $\mathscr{S}$ qui soit strictement croissante.

2.3. Soit S une fonction de $\mathscr{S}$ fixée et soit s la fonction définie sur $[0,1]$ par $s(u) = \displaystyle\int_u^1 S(x)\,dx$.

2.3.1. Montrer que

$$\int_0^1 x\,S(x)\,dx = \int_0^1 s(u)\,du.$$

2.3.2. Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ on note 1_E la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $1_E(x,y) = 1$ si $(x,y)\in E$ et $1_E(x,y) = 0$ si $(x,y)\notin E$.
Pour $u\in[0,1]$ montrer que

$$s(u) = \int_0^2 \left[\int_0^1 1_A(x,y)\,dx\right] dy$$

où A est l'ensemble $\{(x,y)\in[0,1]\times[0,2]; x\geqslant u, S(x)\geqslant y\}$.
On pourra admettre et utiliser le théorème de Fubini sous la forme suivante : si g et h sont deux fonctions continues de $[0,1]\times[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ et E est l'ensemble $\{(x,y)\in[0,1]\times[0,2]; g(x,y)\geqslant 0, h(x,y)\geqslant 0\}$, alors

$$\int_0^1 \left[\int_0^2 1_E(x,y)\,dy\right] dx = \int_0^2 \left[\int_0^1 1_E(x,y)\,dx\right] dy.$$

2.3.3. Pour $u\in[0,1]$ et $y\in[0,2]$ montrer que

$$\mathbb{P}\Big[U\geqslant u, S(U)\geqslant y\Big] \leqslant \mathbb{P}\Big[U\geqslant u, F_V^{-1}(U)\geqslant y\Big].$$

2.4. Montrer que, parmi les fonctions S de $\mathscr{S}$, la fonction F_V^{-1} rend minimale la quantité $\mathbb{E}\left[\left(S(U)-U\right)^2\right]$.
Comparer ce résultat au résultat obtenu pour l'exemple de la question 2.1.

Partie 3

Comparer les résultats énoncés et les méthodes proposées dans les parties 1 et 2.

Fin de l'épreuve