ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

CONCOURS D'ADMISSION SESSION 2018

FILIÈRE BCPST

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Lyon, Paris, Paris-Saclay et à l'ENPC

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

⋆ ⋆ ⋆

L'épreuve est composée de deux exercices indépendants. Dans ce qui suit,

— pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\lceil x \rceil$ comme le plus petit entier supérieur ou égal à x, c'est-à-dire $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z}\,;\, x \leqslant n\}$;

— on note $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls ;

— sauf mention contraire, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exercice 1

Soit $r \in \,]0, +\infty[$ un nombre réel fixé. On considère l'équation différentielle

$$R'(t) = R(t),$$

où $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ satisfaisant $R(0) = r$, ainsi qu'une fonction continue $A\colon [0, +\infty[\,\to\,]0, +\infty[$, satisfaisant $A(0) = 2$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, vérifiant

$$\forall t \in \,]0, +\infty[\qquad A'(t) = \frac{-A(t)R(t)}{A(t) + 1}.$$

1.1. Déterminer $R(t)$ et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^t R(s)\, ds$.

1.2. Trouver une primitive de la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Étant donnée une fonction $B\colon]0, +\infty[\,\to\,]0, +\infty[$ de classe $\mathscr{C}^1$, en déduire une primitive de la fonction

$$t \longmapsto \left(1 + \frac{1}{B(t)}\right) B'(t).$$

1.3. En remarquant que

$$\int_0^t \left(1 + \frac{1}{A(s)}\right) A'(s)\, ds = -\int_0^t R(s)\, ds$$

et en utilisant la question précédente, exprimer t en fonction de $A(t)$ et de r.

On définit $\tau(r) \in]0,+\infty[$ par l'égalité $A(\tau(r)) = 1$. Donner une formule explicite pour $\tau(r)$ en fonction de r.

1.4. Montrer que la fonction $r \mapsto \tau(r)$ est monotone sur $]0,+\infty[$ et décrire son image $\tau(]0,+\infty[)$.

1.5. On considère une fonction continue $S\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, dérivable sur $]0,\tau(r)[\cup]\tau(r),+\infty[$, qui vérifie $S(0) = 1-r$ ainsi que les équations différentielles

$$\begin{array}{rcll} S'(t) & = & -S(t) & \text{si } t \in]0,\tau(r)[, \\ S'(t) & = & 2S(t) & \text{si } t \in]\tau(r),+\infty[. \end{array}$$

Donner une formule explicite pour $S(t)$ pour $t \in]0,\tau(r)[$, en déduire $S(\tau(r))$, puis une formule explicite pour $S(t)$ pour $t \in]\tau(r),+\infty[$.

On cherche à déterminer r et $T > 0$ tels que

$$\textbf{(H)} \qquad R(T)+S(T) = 10 \qquad \text{et} \qquad \frac{R(0)}{R(0)+S(0)} = \frac{R(T)}{R(T)+S(T)}.$$

1.6. Montrer que l'hypothèse $\frac{R(0)}{R(0)+S(0)} = \frac{R(T)}{R(T)+S(T)}$ implique

$$\frac{R(T)}{R(0)} = \frac{S(T)}{S(0)} = \frac{R(T)+S(T)}{R(0)+S(0)}.$$

1.7. Montrer que les hypothèses **(H)** impliquent l'inégalité $T > \tau(r)$.

1.8. Sous les hypothèses **(H)**, écrire, à l'aide des questions 1.3, 1.5 et 1.7, des formules explicites pour $\frac{R(T)}{R(0)}$ et $\frac{S(T)}{S(0)}$, puis, grâce à **(H)**, une formule pour $\frac{R(T)+S(T)}{R(0)+S(0)}$.

1.9. En déduire des valeurs explicites pour T puis pour $\tau(r)$. Expliciter r en utilisant ces valeurs et la question 1.3.

1.10. Vérifier que les valeurs T, r et $\tau(r)$ calculées à la question 1.9 satisfont effectivement les hypothèses **(H)**.

Exercice 2

Cet exercice est composé de deux parties pouvant être traitées indépendamment.
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, de loi uniforme sur $\{1,\ldots,N\}$. On définit récursivement les variables aléatoires $F_1,\ldots,F_N$ par $F_1 = 1$ puis, pour $i \in \{2,\ldots,N\}$,

$$F_i = \min\Big\{k \geqslant 1\,;\, X_k \notin \bigcup_{j=1}^{i-1}\{X_{F_j}\}\Big\}.$$

2.1. Première partie de l'exercice 2.

2.1.1. Soit $N = 3$. On considère l'évènement suivant :

$$\{X_1 = 3,\ X_2 = 3,\ X_3 = 2,\ X_4 = 3,\ X_5 = 1,\ X_6 = 2\}.$$

Identifier F_1, F_2, F_3, ainsi que X_{F_1}, X_{F_2}, X_{F_3}.

2.1.2. Montrer que la famille $(F_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ est strictement croissante et que, pour tout $k \in \{1,\dots,N\}$, on a $\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k}\{X_{F_i}\}\right) = k$.

2.1.3. Soit $i \in \{2,\dots,N\}$ et soit $j \geqslant F_{i-1}+1$. On définit une variable aléatoire Z_j par

$$Z_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X_j \in \{X_1,\dots,X_{F_{i-1}}\}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Identifier la loi de Z_j. Si $j' \geqslant F_{i-1}+1$ et $j \neq j'$, montrer que les variables aléatoires Z_j et $Z_{j'}$ sont indépendantes.

2.1.4. Pour $i \in \{2,\dots,N\}$, décrire la loi de $F_i - F_{i-1}$, expliciter son espérance et sa variance. Montrer l'indépendance des variables aléatoires $F_i - F_{i-1}$ et $F_j - F_{j-1}$ pour tous les $i, j \in \{2,\dots,N\}$ tels que $i \neq j$.

2.1.5. Pour tout $i \in \{2,\dots,N\}$, montrer l'inégalité

$$\int_i^{i+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t}\,dt$$

et en déduire que $\left|\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} - \ln N\right| \leqslant C$, où $C > 0$ est une constante indépendante de N.

2.1.6. Calculer l'espérance et la variance de F_N.

2.1.7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de N telle que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{F_N}{N\ln N} - 1\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{C}{(\ln N)^2}.$$

2.2. Deuxième partie de l'exercice 2.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1,\dots,N\}$, on définit l'évènement $E_{k,i} = \left\{i \notin \{X_1,\dots,X_k\}\right\}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 0$, on pose

$$k_N(t) = \lceil N\ln N + tN \rceil.$$

On rappelle la *formule du crible* : pour toute famille d'évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{l=1}^{n}\Big((-1)^{l+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_l\leqslant n} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{l} A_{i_j}\Big)\Big).$$

2.2.1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $l \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_l \leqslant N$, montrer l'égalité

$$\mathbb{P}(E_{k,i_1} \cap \cdots \cap E_{k,i_l}) = \left(1 - \frac{l}{N}\right)^k.$$

2.2.2. Écrire l'évènement $\{F_N > k\}$ comme une union d'évènements $E_{k,i}$, puis, en utilisant la formule du crible, montrer l'égalité

$$\mathbb{P}(F_N > k) = \sum_{l=1}^{N}(-1)^{l+1}\binom{N}{l}\left(1-\frac{l}{N}\right)^{k}.$$

2.2.3. En étudiant la fonction $x \mapsto 1 - x - e^{-x}$, montrer que l'on a $1 - x \leqslant e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.2.4. Soit $t \geqslant 0$ et soit $l \in \mathbb{N}$. Si $N \geqslant l$, montrer l'inégalité

$$\binom{N}{l}\left(1-\frac{l}{N}\right)^{k_N(t)} \leqslant \frac{1}{l!}e^{l\ln N - k_N(t)\frac{l}{N}}$$

puis l'inégalité

$$\binom{N}{l}\left(1-\frac{l}{N}\right)^{k_N(t)} \leqslant \frac{e^{-tl}}{l!}.$$

2.2.5. Soit $t \geqslant 0$ et soit $l \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $N \geqslant l+1$, on a

$$\left| l\ln N - \sum_{i=N-l+1}^{N} \ln i \right| \leqslant \frac{C}{N} \qquad \text{et} \qquad \left| l\ln N + k_N(t)\ln\left(1-\frac{l}{N}\right) + tl \right| \leqslant \frac{C\ln N}{N}.$$

En déduire

$$\lim_{N\to\infty}\binom{N}{l}\left(1-\frac{l}{N}\right)^{k_N(t)} = \frac{e^{-tl}}{l!}.$$

2.2.6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{e^{-tl}}{l!}$ est absolument convergente et calculer sa somme.

2.2.7. Soit $t \geqslant 0$. Pour $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geqslant N_0$, on a

$$\left| \sum_{l=N_0}^{N}(-1)^{l+1}\binom{N}{l}\left(1-\frac{l}{N}\right)^{k_N(t)} \right| + \sum_{l=N_0}^{\infty}\left|(-1)^{l-1}\frac{e^{-tl}}{l!}\right| \leqslant \varepsilon.$$

En déduire qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geqslant N_1$,

$$\left| \mathbb{P}\left(F_N > k_N(t)\right) - \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{e^{-tl}}{l!} \right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Le premier exercice est issu de travaux expérimentaux sur des bactéries résistantes à l'ampicilline (A). Le second est en lien avec l'attachement de monomères sur des chaînes carbonées.