ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

CONCOURS D'ADMISSION SESSION 2016

FILIÈRE BCPST

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Cachan, Lyon, Paris et à l'ENPC

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

⋆ ⋆ ⋆

L'épreuve est composée de quatre parties. Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes. On pourra admettre les résultats des parties 1 et 3 pour traiter la partie 4.

Dans ce qui suit, on utilisera les notations suivantes.

- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
- Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est à support compact s'il existe x_-, $x_+ \in \mathbb{R}$, avec $x_- < x_+$, tels que $f(x) = 0$ si $x < x_-$ ou $x > x_+$.
- Soit $\sigma > 0$. On note Γ_{σ^2} la Gaussienne de paramètre σ^2, c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\Gamma_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.
- Pour deux fonctions continues f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ convergent, on admettra que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy$ converge. On notera alors $f * g$ la convolution de f par g, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy.$$
On admettra de plus que pour tous $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 > 0$, $\Gamma_{\sigma_1^2} * \Gamma_{\sigma_2^2} = \Gamma_{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

1. Fonctions gaussiennes

(1.1) Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact et $\sigma > 0$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq C\,\Gamma_{\sigma^2}(x)$.

(1.2) Soient $\sigma > 0$, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|e^{-\sigma x^2}$. En étudiant le signe de g' sur $]0, +\infty[$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0, +\infty[$,
$$g(x) \leq C.$$
En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|e^{-\sigma x^2} \leq C$. En utilisant un argument similaire, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 e^{-\sigma x^2} \leq C$.

(1.3) Soient $0 < \sigma_1 < \sigma_2$ et $k \in \{1, 2\}$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|x|^k\,\Gamma_{\sigma_1^2}(x) \leqslant C\,\Gamma_{\sigma_2^2}(x).$$

(1.4) Soit $\sigma > 0$. Montrer que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\Gamma_{\sigma^2}(x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\Gamma_{\sigma^2}(x)\,dx$ sont convergentes, et calculer leurs valeurs.

(1.5) Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{\sigma^2}(x + x_0)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \Gamma_{\sigma^2}(x + x_0)\, dx.$$

2. Dynamique d'un système d'équations différentielles

Soit $\gamma > 0$. On considère des fonctions continues $N : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $Z : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, dérivables sur $]0, +\infty[$, solutions du système suivant:

$$\begin{cases} N'(t) = (Z(t) - 1)N(t), \\ Z'(t) = (1 + Z(t))(2 - Z(t)) - \gamma Z(t). \end{cases}$$

On suppose de plus que $N(0) > 0$ et $Z(0) > 0$. Le but de cette partie est d'étudier le comportement de $N(t)$ et $Z(t)$ lorsque $t \geq 0$ est grand.

(2.1) Calculer les constantes $a > 0$ et $A > 0$ telles que la fonction Y définie pour $t \geq 0$ par $Y(t) = Z(t) + a$ vérifie

$$Y'(t) = (A - Y(t))Y(t).$$

(2.2) Soit $Y_0 \in]0, +\infty[$. En dérivant $W(t) = \frac{1}{Y(t)}$, trouver une solution explicite de l'équation $Y'(t) = (A - Y(t))Y(t)$ telle que $Y(0) = Y_0$.

On admet que cette solution explicite est l'unique solution de l'équation différentielle $Y'(t) = (A - Y(t))Y(t)$ telle que $Y(0) = Y_0$.

(2.3) En déduire une formule explicite de $Z(t)$ pour $t \geq 0$.

Montrer que $Z(t)$ converge vers une certaine constante $\bar{Z} > 0$ lorsque $t \to \infty$.

Vérifier que $\bar{Z}$ est l'unique solution positive de l'équation

$$0 = (1 + \bar{Z})(2 - \bar{Z}) - \gamma \bar{Z}.$$

(2.4) Calculer la constante $d \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{\gamma \to 0,\, \gamma > 0} \frac{\bar{Z} - (2 + d\gamma)}{\gamma} = 0.$$

(2.5) Pour $z \in \mathbb{R}$, on considère la solution N_z de l'équation différentielle

$$N_z'(t) = (z - 1)N_z(t),$$

de condition initiale $N_z(0) = 1$. Montrer qu'il existe $z^* \in \mathbb{R}$ (que l'on explicitera), tel que

$$\lim_{t \to +\infty} N_z(t) = 0 \quad \text{si } z < z^* \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} N_z(t) = +\infty \quad \text{si } z > z^*.$$

(2.6) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $t_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$,

$$\frac{N_{\bar{Z}-\varepsilon}(t)}{N_{\bar{Z}-\varepsilon}(t_0)} \leqslant \frac{N(t)}{N(t_0)} \leqslant \frac{N_{\bar{Z}+\varepsilon}(t)}{N_{\bar{Z}+\varepsilon}(t_0)}.$$

(2.7) Déterminer la valeur γ^* du paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$ pour laquelle $\bar{Z} = z^*$.

Quelle est la limite de $N(t)$ lorsque $t \to \infty$, dans les cas où $\gamma < \gamma^*$ et $\gamma > \gamma^*$?

3. Dérivation et intégration

Soit $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ soit deux fois dérivable en la variable t. Soit aussi $\bar{t} > 0$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $\sigma > 0$ tels que pour tout $(t, x) \in]0, \bar{t} + 1] \times \mathbb{R}$,

$$|f(t, x)| + \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leqslant C\, \Gamma_{\sigma^2}(x) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) \right| \leqslant C.$$

(3.1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |h| < \min(1, \bar{t})$. Grâce à la formule des accroissements finis, montrer que

$$\left| \frac{f(\bar{t}+h, x) - f(\bar{t}, x)}{h} - \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x) \right| \leqslant C|h|.$$

(3.2) Soient $R > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |h| < \min(1, \bar{t})$. Montrer que

$$\left| \int_{-R}^{R} \frac{f(\bar{t}+h, x) - f(\bar{t}, x)}{h} \, dx - \int_{-R}^{R} \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x) \, dx \right| \leqslant 2CR|h|.$$

(3.3) Soient $R > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |h| < \min(1, \bar{t})$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{-R} \left| \frac{f(\bar{t}+h, x) - f(\bar{t}, x)}{h} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x) \right| dx \leqslant 2C \int_{-\infty}^{-R} \Gamma_{\sigma^2}(x) \, dx,$$

et

$$\int_{R}^{+\infty} \left| \frac{f(\bar{t}+h, x) - f(\bar{t}, x)}{h} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x) \right| dx \leqslant 2C \int_{R}^{+\infty} \Gamma_{\sigma^2}(x) \, dx.$$

(3.4) Soient $R > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |h| < \min(1, \bar{t})$. Montrer que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\bar{t}+h, x) - f(\bar{t}, x)}{h} \, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x) \, dx \right| \\ &\qquad \leqslant 2CR|h| + 2C \int_{-\infty}^{-R} \Gamma_{\sigma^2}(x) \, dx + 2C \int_{R}^{+\infty} \Gamma_{\sigma^2}(x) \, dx. \end{aligned}$$

(3.5) Soient $R > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |h| < \min(1, \bar{t})$. Montrer que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\bar{t}+h, x) - f(\bar{t}, x)}{h} \, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x) \, dx \right| \leqslant 2CR|h| + \frac{2C\sigma^2}{R^2}.$$

(3.6) Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |h| < \min(1, \bar{t})$. Montrer que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\bar{t}+h, x) - f(\bar{t}, x)}{h} \, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x) \, dx \right| \leqslant \left(2C + 2C\sigma^2\right) |h|^{\frac{2}{3}}.$$

(3.7) Montrer que la fonction F définie sur $]0, \bar{t}+1[$ par $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) \, dx$ est dérivable en $\bar{t}$, et

$$F'(\bar{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, x) \, dx.$$

4. Étude d'une équation intégro-différentielle

Soit $h : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ une fonction continue à support compact, positive. On suppose que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \, dx = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, h(x) \, dx = 2$. Soit aussi $\gamma > 0$. On s'intéresse à l'équation suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t}(t, x) &= 2\gamma \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1\left(\frac{y}{2} - x\right) m(t, y) \, dy - m(t, x) \right) \\ &\quad + h(x) \int_{-\infty}^{+\infty} (1+y) m(t, y) \, dy - 2m(t, x) \end{aligned}$$

Soit $m : [0,+\infty[\times\mathbb{R} \to [0,+\infty[$ une fonction continue positive, vérifiant l'équation ci-dessus pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, deux fois dérivable en la variable t sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, et telle que pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$(1+|x|)\left(m(t,x) + \left|\frac{\partial m}{\partial t}(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^2 m}{\partial t^2}(t,x)\right|\right) \leqslant e^t.$$

On suppose que $x \mapsto m(0,x)$ est une fonction à support compact, et que $m(t,0) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Le but de cette partie est d'obtenir des équations différentielles sur les fonctions N et Z définies pour $t \geq 0$ par

$$N(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t,x)\,dx, \quad Z(t) = \frac{1}{N(t)}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,m(t,x)\,dx.$$

(4.1) Montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1\left(\frac{y}{2} - x\right)\Gamma_{\kappa^2}(y)\,dy = \Gamma_{\kappa^2}(x).$$

(4.2) Montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(1+y)\Gamma_{\kappa^2}(y)\,dy\right)h(x) - 2\Gamma_{\kappa^2}(x) \leqslant \lambda\Gamma_{\kappa^2}(x).$$

(4.3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que la fonction $\bar{m}$ définie pour tout $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$ par

$$\bar{m}(t,x) = Ce^{\lambda t}\Gamma_{\kappa^2}(x)$$

vérifie $m(0,x) \leqslant \bar{m}(0,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial t}(t,x) \geq 2\gamma\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_1\left(\frac{y}{2} - x\right)\bar{m}(t,y)\,dy - \bar{m}(t,x)\right) + h(x)\int_{-\infty}^{+\infty}(1+y)\bar{m}(t,y)\,dy - 2\bar{m}(t,x).$$

On admet que cette inégalité implique que pour tout $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $m(t,x) \leqslant \bar{m}(t,x)$.

(4.4) Montrer que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} m(t,x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} xm(t,x)\,dx$ sont convergentes pour tout $t \geq 0$.

(4.5) On admet la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_1\left(\frac{y}{2} - x\right)m(t,y)\,dy\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_1\left(\frac{y}{2} - x\right)m(t,y)\,dx\right)dy.$$

Montrer que pour tout $t > 0$,

$$N'(t) = (Z(t) - 1)N(t).$$

(4.6) On admet la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\Gamma_1\left(\frac{y}{2} - x\right)m(t,y)\,dy\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\Gamma_1\left(\frac{y}{2} - x\right)m(t,y)\,dx\right)dy.$$

Montrer que pour tout $t > 0$,

$$Z'(t) = (1 + Z(t))(2 - Z(t)) - \gamma Z(t).$$

L'équation étudiée dans la partie 4 est inspirée par un modèle décrivant l'effet d'échanges de P-glycoprotéines sur une population de cellules cancéreuses mutantes m. Nous montrons que l'étude de cette équation peut se faire au moyen d'un système de deux équations différentielles. La partie 2 décrit ainsi la dynamique la taille de la population mutante.